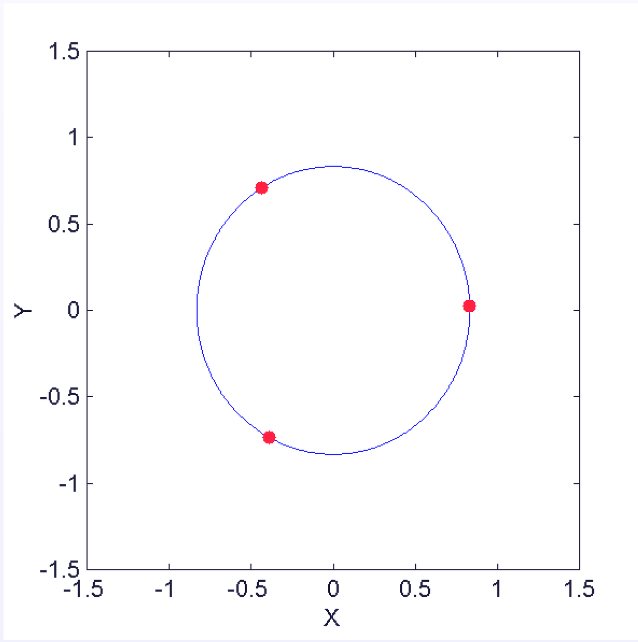
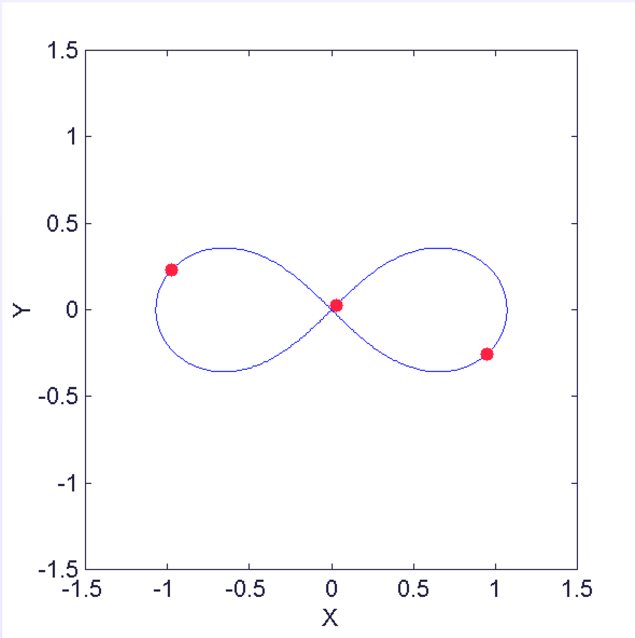
Soluções Coreográficas de N corpos

Aluno: Rafael Soares Pinto, Orientador: Eduardo Guéron

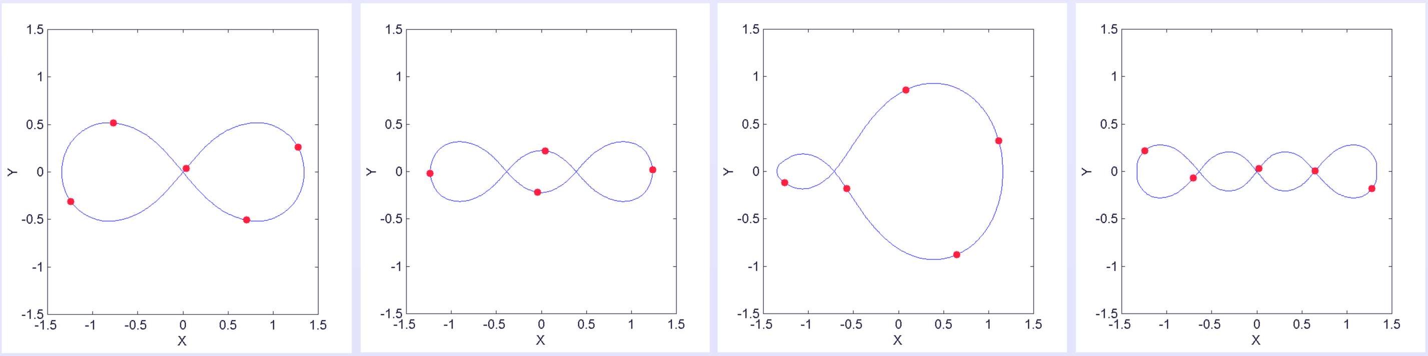
Soluções Coreográficas:



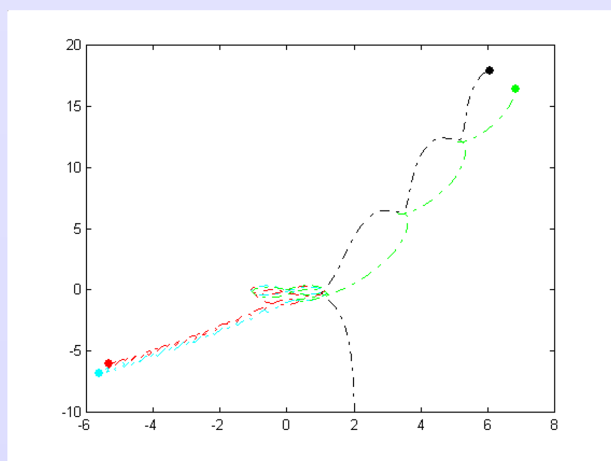
Uma das primeiras soluções descobertas. Lagrange encotrou essa órbita em 1776. Nesse caso, temos três corpos de massas iguais.



Em 1999, Chenciner & Montgomery provaram que deve existir uma solução em forma de "oito" para três corpos de massas iguais, onde elas orbitam a mesma curva, sempre espaçadas pelo mesmo tempo, no caso, T/3.



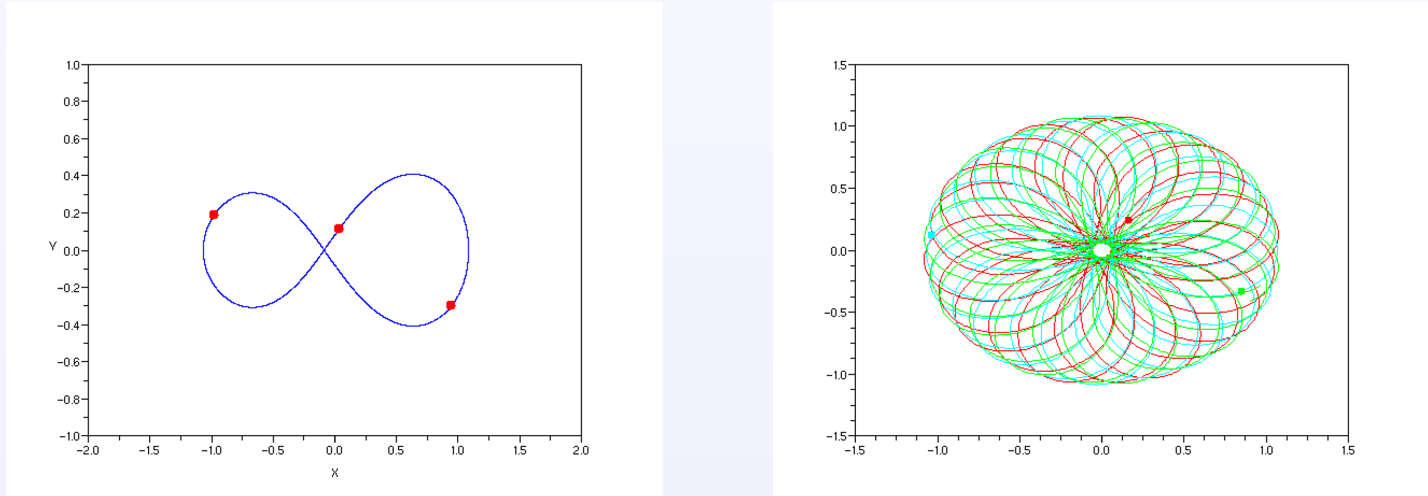
Utilizando métodos numéricos (baseados na idéias empregadas no trabalho de Montgomery & Chenciner), Simó encontrou várias outras soluções, para N corpos de massas iguais orbitando todos a mesma curva, que ele chamou de coreografias



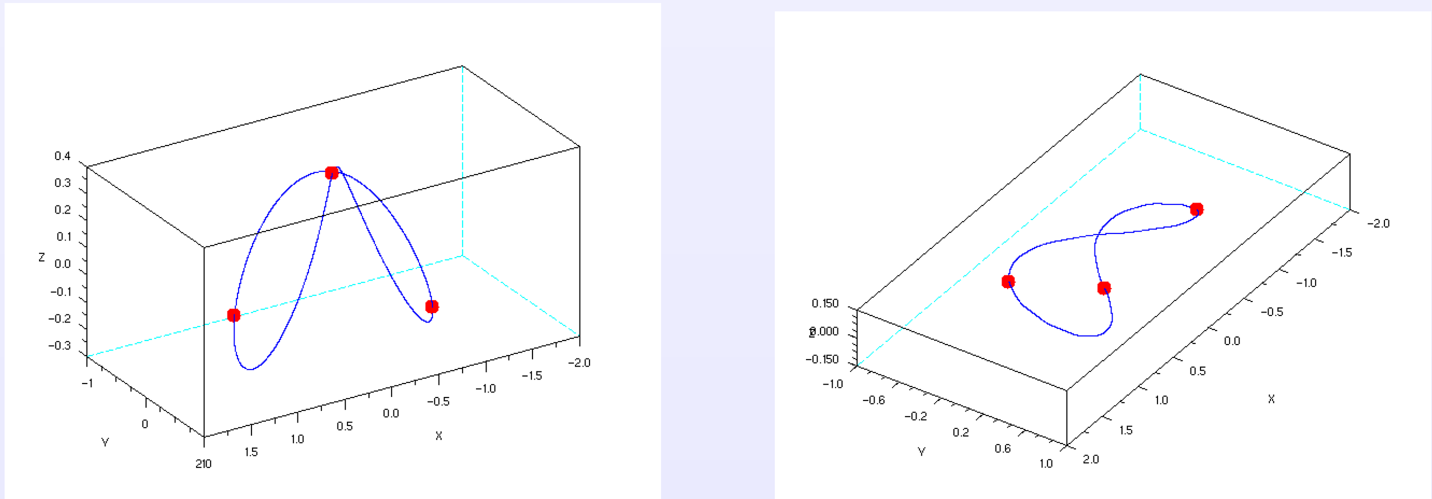
Um jeito de criar um oito é colidindo dois sistemas binários. O resultado é o oito, e um corpo ejetada.

Outras soluções a partir do "oito":

Podemos encontrar outras soluções, utilizando referenciais que giram com certa velocidade angular, e então minimizar a ação (nesse referencial).

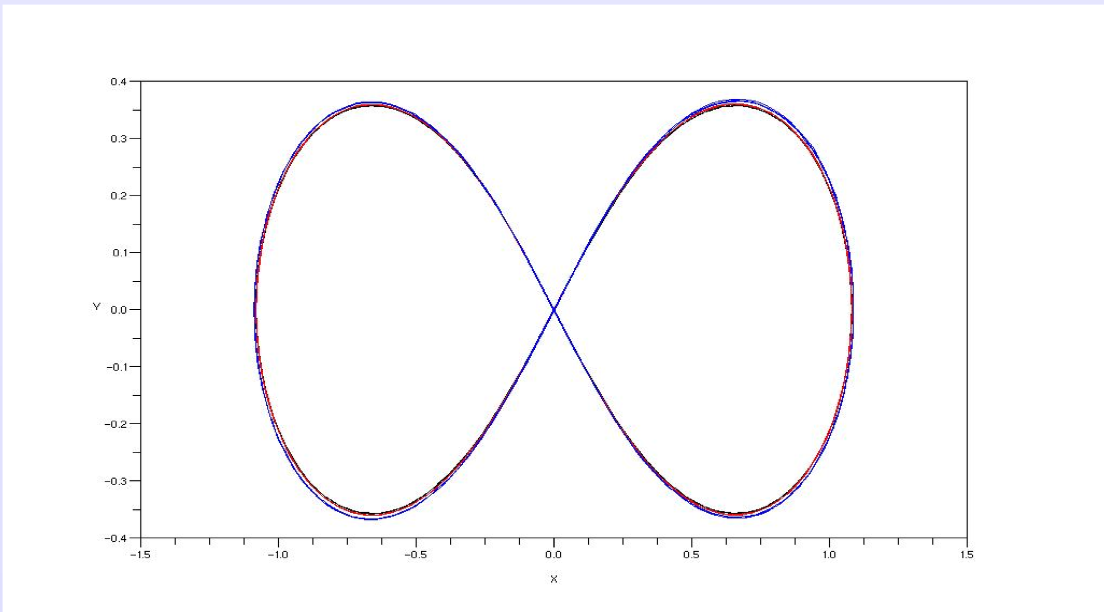


Nas duas figuras acima, temos uma solução encontrada num referencial que gira normal ao plano da órbita. Na esquerda, temos a solução nesse referencial, e na direita, a órbita vista no referencial inercial.



Na figura acima, a esquerda, temos uma solução encontrada para um referencial que possui o eixo de rotação que corta o oito no eixo y=0. A órbita adquire uma formato de "orelha de elefante". Quando a velocidade angular é igual a velocidade orbital dos corpos no oito, as duas orelhas se "juntam",e temos a solução de Lagrange. Na figura da direita, o eixo de rotação foi escolhido como sendo x =0, resultando em uma órbita sem simetria.

O "oito relativístico"



Investigamos se existe o oito para potenciais diferentes do newtoniano. O pseudo-potencial de Paczynsky-Wiita, mostrado acima, foi utilizado, pois ele foi elaborado para imitar certos efeitos de RG. Em preto, temos o potencial newtoniano, em vermelho, B = 0.01 e em azul, B = 0.025.

Obtendo uma coreografia:

A idéia por trás de todas as soluções aqui mostradas é minimizar numericamente a ação do sistema formado por N corpos de massas iguais:

$$A = \int_0^T \sum_{i=1}^{N} \frac{v_i^2}{2} + \sum_{i=1, i>j}^{N} \frac{1}{r_{ij}} dt$$

Como esperamos obter órbitas periódicas, escrevemos as coordenadas x e y das massas como séries de Fourier truncadas em M termos (onde M depende da precisão que desejamos):

$$x(t) = \sum_{k=1}^{M} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{M} c_k \cos(kt) + d_k \sin(kt)$$

A definição de coreografia é de uma solução do problema de N corpos, em que uma todas as massas percorrem uma mesma curva, sendo cada massa separada da outra por um tempo T/N, com T o período desejado. Então, cada coordenada das massas xi e yi é dada por (onde i=0,1,...,N-1), e escolhendo T = 2π:

$$x_i(t) = x(t - 2\pi i / N)$$

$$y_i(t) = y(t - 2\pi i / N)$$

Com essas substituições, a ação se torna uma função das 4M variáveis, a_k, b_k, c_k, d_k. Então utilizamos o método do gradiente conjugado para procurar um mínimo da função. Como ponto de partida, utilizamos uma curva com a topologia da solução que esperamos obter, e.x: para o oito, começamos com (sin(t),sin(2t)). Para as órbitas em referenciais que giram, pequenas modificações devem ser feitas nas expansões das coordenadas. Nós então escrevemos um programa em C que realiza as operações necessárias para minimizar a ação, e todas as soluções aqui mostradas foram obtidas por nós com nosso código.

O Pseudo-Potencial de Paczynsky-Wiita foi modelado arbitrariamente, a fim de imitar fenomenos relativisticos. Sua importancia é devido a sua simplicidade e condordância qualitativa com os resultados utilizando RG.

$$V_{PW} = \frac{-1}{r - r_S}$$

Onde r_s é o raio de Schwarzchild. Por problemas numéricos, tinhamos que reescalar as coordenadas, de tal modo que r_s era um parametro do problema (chamado de B, conforme aparece na figura acima).

Uma questão importante é a estabilidade da solução. Isso é feito estudando os autovalores da matriz de monodromia das órbitas. Nós também realizamos essa análise, sendo que nossos resultados estão em pleno acordo com a literatura. Apenas a solução de Lagrange e a solução do oito e suas respectivas órbitas em referenciais que giram (para certos valores da velocidade angular) são estáveis. Todas as outras coreografias encontradas até hoje são instáveis. Para o potencial PW, ainda não temos provas concretas da sua estabilidade.

Quanto a formação do oito pela colisão de sistemas binários, embora seja fácil encontrar condições iniciais para tal, a solução acaba se desfazendo rapidamente pela perturbação da quarta massa. Cálculos indicam que a probabilidade de se encontrar uma solução em forma de oito é da ordem de 1 por gálaxia.

Referências Bibliográficas:

[1] A. Chenciner e R. Montgomery, A remarkable periodic solution to the three body problem in the case of equal masses, 2000, Annals of Mathmatic

[2] R. Montgomery, A new solution to the three body problem, 2001, Notices of the AMS

[3] C. Simó, New families of solution in the N-body problem, Proceedings of the ECM 2000

[4] D. C. Heggie, A new outcome of binary-binary scattering, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2000

[5] B. Paczynsky e P. J. Wiita, Thick accreation disk and supercritical luminosities, Astronomy & Astrophysics, 1980

Apoio financeiro: CNPQ.