Teorema de Aproximação de Weierstrass

ALEX ALVES DENTAMARO[1] & DANIELA MARIZ SILVA VIEIRA[2]
[1]alvesdentamaro@yahoo.com.br e [2]danim@ime.unicamp.br

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, Brasil.

Apoio Financeiro: SAE

APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES - POLINÔMIOS DE BERNSTEIN - POLINÔMIO DE TAYLOR

1 Introdução

Um polinômio definido em um intervalo fechado e limitado é contínuo neste intervalo. Porém, o conjunto das funções contínuas definidas neste intervalo não é composto apenas por polinômios. O teorema de aproximação de Weierstrass garante, no entanto, que toda função contínua definida em um intervalo fechado e limitado pode ser uniformemente aproximada por polinômios. A demonstração deste teorema utiliza os chamados polinômios de Bernstein, que são os elementos práticos para se fazer a aproximação de funções contínuas definidas no intervalo fechado com extremos zero e um. Existem outros polinômios além do polinômio de Bernstein, como o polinômio de Taylor, que fazem aproximações deste tipo. Foram (e ainda estão sendo) estudados exemplos para verificar como se comporta a aproximação feita utilizando-se um tipo de polinômio ou outro.

2 Metodologia

O desenvolvimento do projeto foi feito através de seminários semanais apresentados à orientadora pelo bolsista para familiarização, reflexão e discussão de tópicos tais como este que está sendo exposto.

3 Teorema de Weiersstrass

Seja f uma função qualquer em $C[a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$, existe um polinômio P tal que $|P(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in [a,b]$.

Afim de provarmos a validade do Teorema, consideramos o lema:

Lema: **É suficiente provar o Teorema para o caso especial em que $[a,b] = [0,1]$.**

Agora provamos o Teorema para o caso $[0,1]$.

Demonstração: Essa prova será feita com a introdução dos polinômios de Bernstein:

Para cada $f \in C[0,1]$ definimos a seguinte sequência de polinômios:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \; (0 \leq x \leq 1;\, n \in N).$$

B_n é chamado de o **n-ésimo polinômio de Bernstein de f**.

Através de algumas manipulações algébricas, obtemos as seguintes expressões:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1, \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x, \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{x}{n}.$$

Das igualdades acima, segue que

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$$

Como f, por hipótese, é contínua e $[0,1]$ é compacto, segue que f é **uniformemente contínua** nesse intervalo. Por isso, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ sempre que } |x - y| < \delta \text{ e } x, y \in [0,1].$$

Escolhemos então $n_0 \in$ tal que $\frac{1}{\sqrt[4]{n_0}} < \delta$ e $\frac{1}{\sqrt[4]{n_0}} < \frac{\varepsilon}{4||f||}$. Então

$$|f(x) - B_n(x)| = \sum_{k=0}^{n} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum{}' + \sum{}'',$$

onde $\sum'$ é a soma sobre os valores de k tais que $\left|\frac{k}{n} - x\right| < \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ e $\sum''$ é a soma dos demais valores de k, isto é, $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \Leftrightarrow \frac{(k-nx)^2}{\sqrt{n^3}} \geq 1$. Portanto

$$\left|\sum{}''\right| = \left|\sum{}''\right|\left|\left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right| \leq \frac{2||f||}{\sqrt{n}}.$$

E se $n \geq n_0 \Rightarrow |\sum''| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Agora, se k satisfaz a desigualdade $\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta$, então $|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |\sum'| < \frac{\varepsilon}{2}$. Portanto

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \left|\sum{}'\right| + \left|\sum{}''\right| < \varepsilon \; \forall x \in [0,1],\, n \geq n_0$$

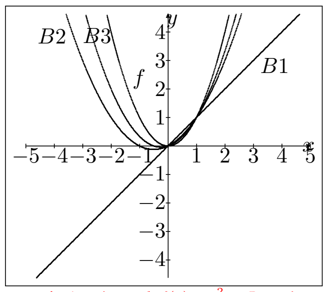
e o Teorema está provado.

4 Exemplos

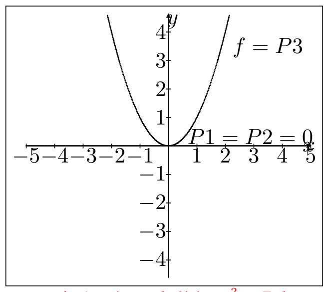
À seguir, apresentamos, graficamente, alguns exemplos, comparando aproximação de funções por polinômios de Bernstein com aproximação de funções por polinômios de Taylor. Para isso, recordemos a definição de um polinômio de Taylor:

Dada uma função $f : [a,b] \longrightarrow$, n vezes derivável no ponto $a \in [a,b]$, o **polinômio de Taylor de ordem n de f, no ponto a**, é o polinômio

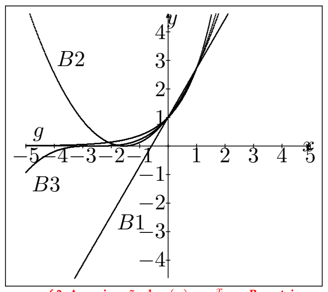
$$P_n(f)(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a).(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.f^{(n)}(a).(x-a)^n$$



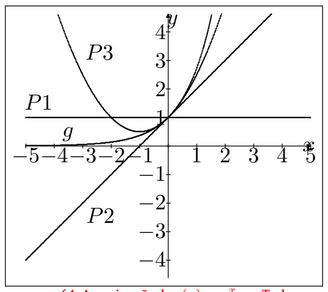
graf.1: Aproximação de $f(x) = x^2$ por Bernstein



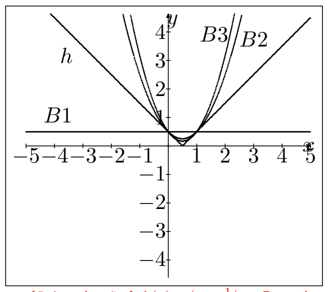
graf.2: Aproximação de $f(x) = x^2$ por Taylor



graf.3: Aproximação de $g(x) = e^x$ por Bernstein



graf.4: Aproximação de $g(x) = e^x$ por Taylor



graf.5: Aproximação de $h(x) = |x - \frac{1}{2}|$ por Bernstein

5 Conclusões

$f(x) = x^2$

Como f é um polinômio, é de se esperar que quando se faz a aproximação de f por polinômios, chegue-se rapidamente próximo do polinômio x^2. Perecebe-se que neste caso a aproximação por Taylor é mais conveniente do que por Bernstein.

$g(x) = e^x$

Neste caso, a função g é infinitamente diferenciável. Nos cálculos, é possível perceber uma maior facilidade para obtenção dos polinômios de Taylor em relação aos de Bernstein.

$h(x) = |x - \frac{1}{2}|$

Para esta função h não se pode utilizar aproximação por polinômios de Taylor por se tratar de uma função não diferenciável no intervalo $[0,1]$. Neste caso, inclusive, os polinômios de Bernstein foram obtidos de maneira mais fácil que nos casos anteriores.

Referências

[1] R. R. Goldberg, *Methods of Real Analysis*, Blaisdel Publ. Co., 1964.

[2] E. L. Lima, *Curso de Análise, volume I*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPQ, 1976.