

Orientador: Roberto Antonio Clemente – clemente@ifi.unicamp.br
Aluno: Daniel Sterzo – danhie_st@hotmail.com

Agência Financiadora: Serviço de Apoio ao Estudante – SAE
Palavras-Chave: Equilíbrios MHD – Anisotropia - escoamento

Introdução

As pesquisas em fusão termonuclear controlada sobre aquecimento auxiliar com injeção de neutros, realizadas nas máquinas *tokamak*, indicam uma melhora abrupta do confinamento do plasma quando um nível suficientemente elevado de potência injetada é atingido. Este fenômeno é conhecido na literatura como *L-H transition*, é dizer transição do modo *L (low)* de operação, com baixo tempo de confinamento de energia, para o modo *H (high)* com tempo de confinamento de energia até 100% maior que no modo *L*. O plasma no modo *H* apresenta perfis de temperatura e densidade mais achatados na região central e com fortes gradientes na periferia, onde são observados fortes campos elétricos que indicam a existência de altas velocidades de escoamento, tanto na direção toroidal que poloidal. A interpretação teórica do fenômeno é ainda objeto de pesquisas e na década passada surgiu a necessidade de resolver adequadamente o problema do equilíbrio estacionário do plasma em presença de um escoamento geral, como assim também a possibilidade de anisotropia no tensor de pressões, cuja existência não pode ser excluída devido a presença de fortes campos magnéticos e ao método de aquecimento *per se*.

No caso de axisimetria, a resolução do problema do equilíbrio (MHD) com escoamento resulta num problema de difícil resolução [1], que até o momento somente foi solucionado em alguns casos de interesse, utilizando códigos numéricos complexos.

Numa primeira aproximação, chamada de aproximação de grande razão de aspecto, $R/a \gg 1$ (correspondente ao caso em que a dimensão transversal do toro de plasma a é muito menor que seu raio maior R), pode-se assumir simetria de translação e a configuração pode ser aproximada por uma coluna infinita com seção transversal arbitrária. Mesmo nesta aproximação a obtenção de soluções das equações MHD ideais, com escoamento adiabático (isentrópico), deixa de ser um problema trivial e na literatura somente existem soluções analíticas consistentes para o caso de seção circular [2, 3].

Porém a seção circular não é adequada na maioria dos tokamaks, sendo as seções com forma de D ou retangulares mais apropriadas. Para o caso de seção não circular existem soluções analíticas para o problema do equilíbrio na aproximação de escoamento incompressível e pressão isotrópica [4], embora tais soluções não satisfazem a condição de escoamento isentrópico. Tal condição não pode ser ignorada no caso da aproximação MHD ideal.

Metodologia

O ponto de partida foram as seguintes equações para o estado estacionário do plasma nas unidades típicas utilizadas na literatura:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (01)$$

$$\rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \nabla \cdot \vec{P} = \vec{j} \times \vec{B}, \quad (02)$$

$$\nabla \cdot \left[\left(2p_{\perp} + \frac{p_{\parallel}}{2} \right) \vec{u} \right] + \sigma \vec{B} \cdot (\vec{B} \cdot \nabla \vec{u}) - \vec{u} \cdot \nabla p_{\perp} = 0, \quad (03)$$

$$\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} = 0, \quad (04)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0, \quad (05)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{j}, \quad (06)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (07)$$

onde foi utilizado o tensor de pressões $\vec{P} = p_{\parallel} \vec{I} + \sigma \vec{B} \vec{B}$ com $\sigma = \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B^2}$, sendo $p_{\perp, \parallel}$ as diferentes pressões perpendiculares e paralelas às linhas de campo magnético.

Assumindo simetria de translação e utilizando coordenadas cartesianas, é possível representar o campo magnético em termo de duas funções escalares, que dependem somente de x e y , e também similarmente o campo de velocidade do plasma, na forma:

$$\vec{B} = \nabla A(x, y) \times \hat{e}_z + B_z(x, y) \hat{e}_z, \quad (08)$$

$$\vec{u} = \frac{\nabla F(x, y) \times \hat{e}_z}{\rho} + U_z(x, y) \hat{e}_z. \quad (09)$$

A partir dessas equações e para o caso especial de escoamento incompressível, chegamos a seguinte equação diferencial para o potencial magnético $A(x, y)$:

$$\left(1 - \frac{4}{3} \sigma \right) \nabla^2 A = - \frac{d}{dA} \left[\bar{p} + \left(1 - \frac{4}{3} \sigma \right) \frac{B_z^2}{2} \right] + \frac{4}{3} \frac{|\nabla A|^2}{2} \frac{d}{dA} \sigma, \quad (10)$$

onde $\bar{p} = (p_{\parallel} + p_{\perp})/2$, B_z e σ são funções de A . A equação (10) é inerentemente quase-linear devido aos termos com derivadas primeira de A elevados ao quadrado que aparecem no membro da direita. No caso da função A possuir somente um extremo dentro do domínio de interesse, é possível eliminar tal não-linearidade utilizando a seguinte transformação [5]:

$$\alpha(A) = \int dA \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sigma(A)}, \quad (11)$$

que ao ser utilizada na equação, fornece a seguinte equação para a função α :

$$\nabla^2 \alpha = - \frac{d}{d\alpha} \left[\bar{p} + \left(1 - \frac{4}{3} \sigma \right) \frac{B_z^2}{2} \right]. \quad (12)$$

Sem perda de generalidade consideramos casos em que a função α somente tem um extremo no interior do domínio do plano x, y e se anula na borda do mesmo. Será considerada duas possibilidades para o domínio no plano x, y :

- 1) Um retângulo de lados a e b ;
- 2) Um semi-círculo de raio a ;

Resultados e Discussão

• **Domínio Retangular:** Neste caso, a solução da equação (12), convenientemente normalizada, será da seguinte forma para um retângulo de lados a e b :

$$\bar{\alpha}(x, y) = \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{b}y\right). \quad (13)$$

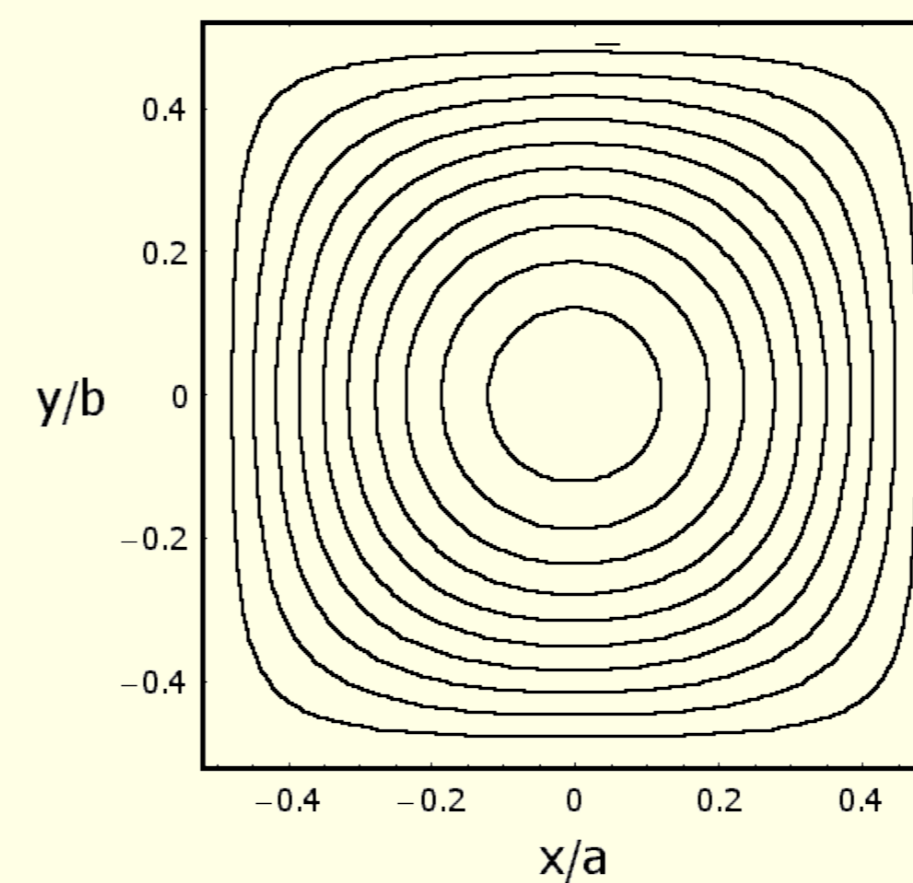


Fig. 1

As curvas de $\bar{\alpha} = \text{constante}$ no plano x, y , dentro do domínio, são representadas na Fig. 1. As curvas representam também o escoamento do plasma no plano. Na Fig. 2 são representadas no plano $y=0$ as funções:

$$\beta_{\parallel} = \frac{2p_{\parallel}}{B_0^2} \quad (\text{curva cheia}), \quad \text{e} \quad \beta_{\perp} = \frac{2p_{\perp}}{B_0^2} \quad (\text{curva de traços}),$$

onde B_0 é o valor do campo magnético longitudinal externo, para um caso típico no qual $a=b$. Pode-se apreciar que as pressões diferem apreciavelmente no centro do equilíbrio e se anulam suavemente na borda. Os correspondentes gráficos de curvas de nível, apareceria praticamente superpostos e não permitiriam apreciar tal diferença. Na Fig. 3 são graficadas, também no plano $y=0$, as componentes y do campo magnético normalizado com B_0 (curva cheia) e da velocidade de escoamento (curva tracejada) normalizada velocidade das ondas de Alfvén correspondente a um valor típico das componentes do campo magnético no plano x, y .

A Fig. 3 mostra que a amplitude da componente y do campo magnético na borda é de ordem de 10% de B_0 , que é uma situação típica nos casos dos tokamaks. A curva correspondente à componente y da velocidade normalizada, junto com as curvas de nível da Fig. 1 da uma idéia do tipo escoamento no plano x, y .

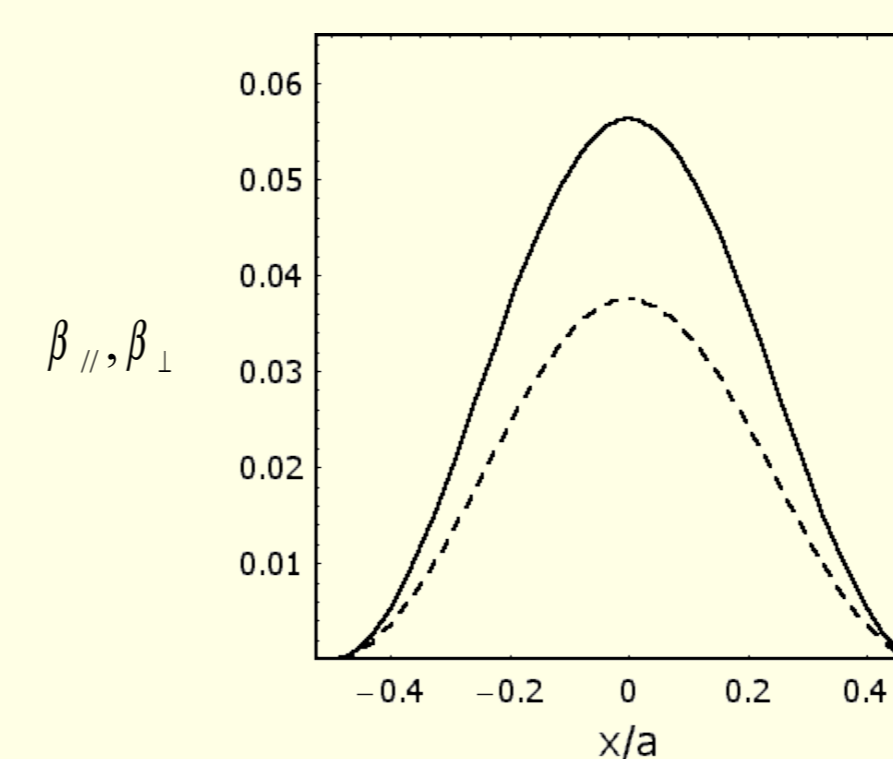


Fig. 2

$$\frac{B_y}{B_0}, \frac{u_y \sqrt{\rho} a}{2\alpha_{\max}}$$

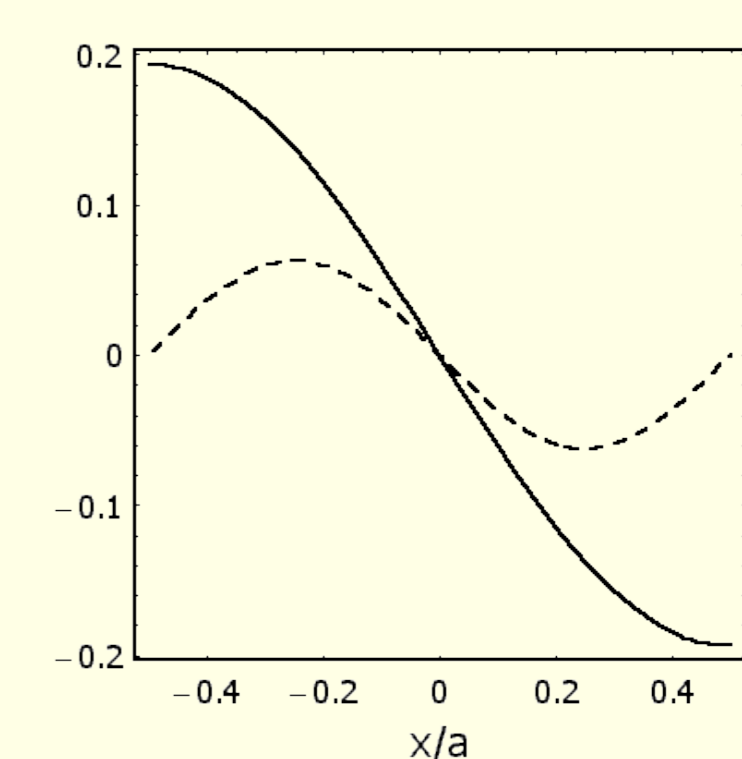


Fig. 3

2) **Domínio Semicircular:** Neste caso é conveniente resolvermos a equação (12) em coordenadas polares, resultando na seguinte solução:

$$\bar{\alpha}(r, \theta) = \frac{J_1(3,83171r/a)}{J_1(1,84118)} \cos \theta \quad (14)$$

onde J_1 é a função de Bessel de primeira espécie e de ordem 1. As curvas de $\bar{\alpha} = \text{constante}$, no plano x, y são representadas na Fig. 4.

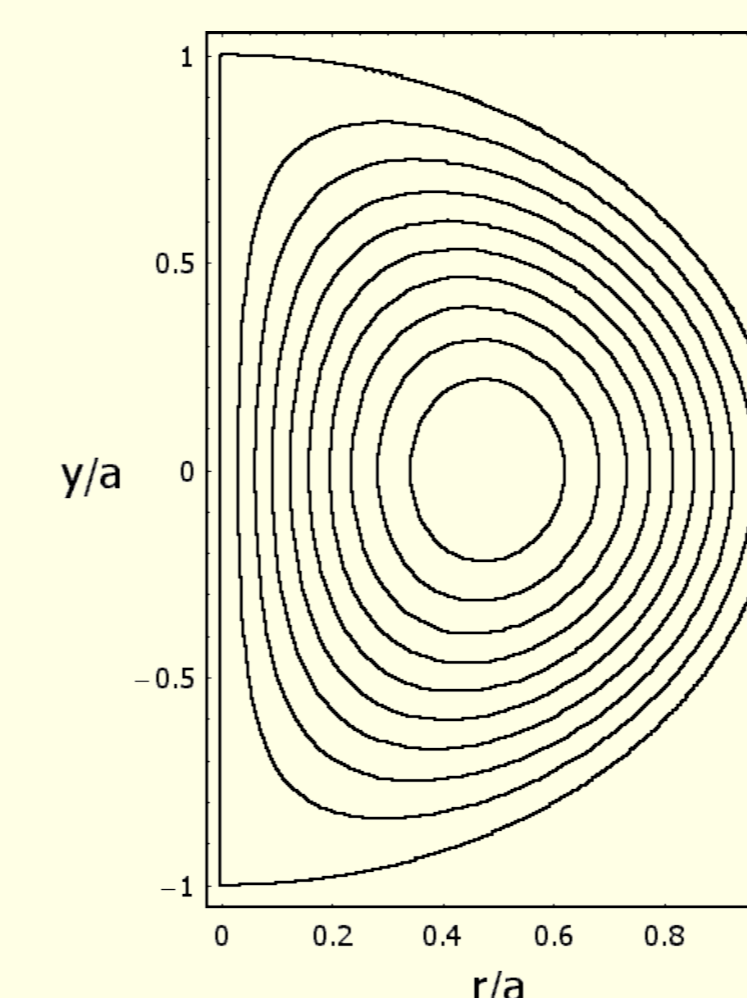


Fig. 4

Este tipo de equilíbrio pode ser considerado uma boa aproximação, para os tokamaks com seção na forma de D, configuração experimental bastante típica. Na Fig. 5 são graficadas novamente exemplos das pressões normalizadas para este caso. Os gráficos são semelhantes ao caso anterior (Fig. 2) com domínio retangular, porém os máximos não estão exatamente em $0,5a$ mas em $0,48a$, devido a diferente geometria.

Na Fig. 6 são graficados, para este caso, as componentes y do campo magnético normalizado com B_0 (curva cheia) e da velocidade de escoamento (curva tracejada), normalizada como no caso anterior, também no plano $y=0$. A amplitude máxima da componente y do campo magnético normalizado resulta menor que no caso anterior devido a diferente alongação da seção.

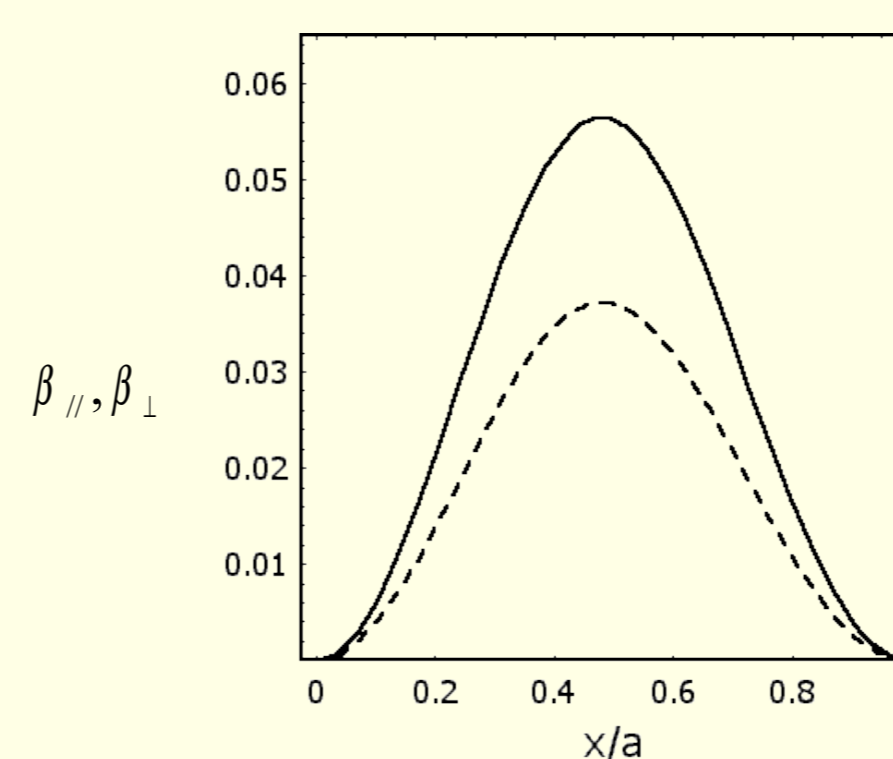


Fig. 5

$$\frac{B_y}{B_0}, \frac{u_y \sqrt{\rho} a}{2\alpha_{\max}}$$

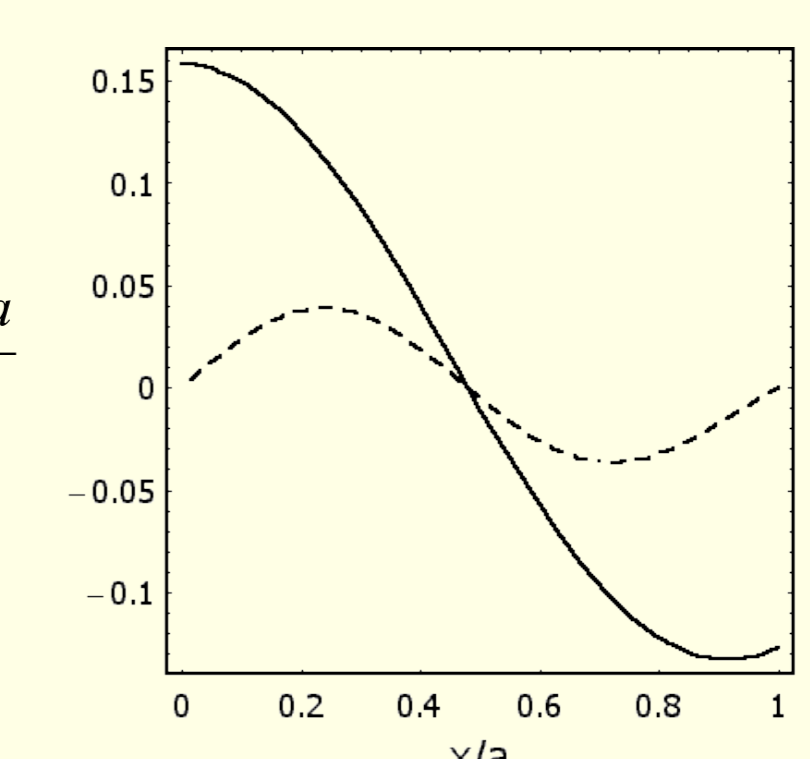


Fig. 6

Conclusão

Foram obtidas soluções exatas para o problema do equilíbrio de uma coluna de um plasma ideal, com escoamento incompressível, diferentes pressões paralelamente e perpendicularmente ao campo magnético e seção diferente da circular. A análise das soluções foi limitado a dois casos particulares relacionados com as características das máquinas tokamaks.

Referências

- [1] Clemente R.A. e Viana R., *On axisymmetric double adiabatic MHD equilibria with plasma flow*, Plasma Physics and Controlled Fusion **41** (1999) 567.
- [2] Throumoulopoulos G.N. e Pantis G., *Magnetohydrodynamic equilibria of a cylindrical plasma with poloidal mass flow and arbitrary cross sectional shape*, Plasma Physics and Controlled Fusion **38** (1996) 1817.
- [3] Throumoulopoulos G.N. e Tasso H., *Cylindrical ideal magnetohydrodynamic equilibria with incompressible flows*, Physics of Plasmas **4** (1997) 1492.
- [4] Simintzis Ch. et al., *Analytic magnetohydrodynamic equilibria of a magnetically confined plasma with sheared flows*, Physics of Plasmas **8** (2001) 2641.
- [5] Clemente R.A., *Anisotropic axisymmetrical equilibria via an analytic method*, Nuclear Fusion **33** (1993) 963.