



PROCESSOS DE MARKOV E MARTINGAIS: ALGUMAS APLICAÇÕES

D.M.KUWAGAKHI¹, M.VACHKOVSKAIA²

¹dn.jp@hotmail.com, ²marinav@ime.unicamp.br



^{1,2}Instituto de Matemática, Estatística e Comp. Científica - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.

1 Introdução

Este projeto consiste no estudo dos tipos mais importantes de processos estocásticos e algumas aplicações destes processos na precificação de derivativos. Nestas aplicações foi estudado o modelo com trajetórias diferenciáveis. A partir de sua análise, mostrou-se que a dinâmica de preço de um ativo financeiro deve ser modelada pelo processo com trajetórias não diferenciáveis. Em seguida foi visto que o modelo de Black e Scholes é adequado ao mercado real, pois usa tal processo na modelagem do preço da ação.

2 Definições

Opção europeia de (compra/venda): É um contrato entre duas partes chamada de titular da opção e lançador da opção, assinados no tempo t_0 , no qual o titular tem o direito de comprar/ vender do lançador uma ação no tempo t_n por um preço K , denominado preço de exercício, pré-estabelecido pelas partes no momento da assinatura do contrato.

Portfólio: É a composição de x u.m investidas no banco e y ações compradas.

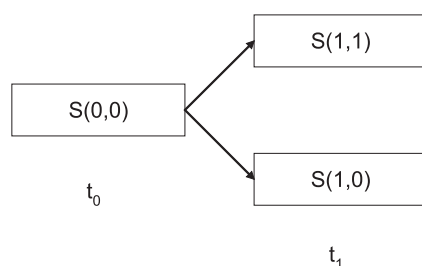
Arbitragem: Um mercado não permite arbitragem se nele é impossível obter um lucro garantido maior do que o oferecido pela taxa de juros livre de risco.

Estratégia: É um conjunto de regras, tal que para cada nó, determina-se tanto a composição do portfólio a ser criado neste nó, quanto o que fazer com os portfólios criados nos tempos anteriores.

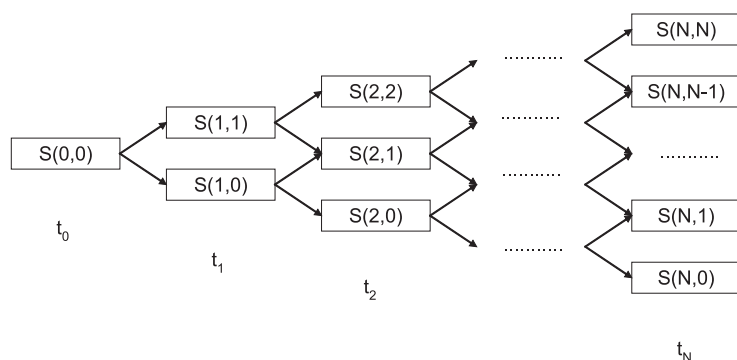
Estratégia autofinanciante: É uma estratégia em que não é necessário adicionar e nem liberar dinheiro extra em cada nó, salvo o inicial e os terminais.

3 Modelos

Modelo Uniperíodo



Modelo Multiperíodo



Modelo de tempo contínuo com trajetórias diferenciáveis

É um mercado com somente um ativo que pode ser comprado ou vendido em quais quer instantes do intervalo de tempo $[0, T]$ e cujo preço no tempo t é uma variável aleatória S_t que apresenta a seguinte estrutura:

$$S_t = S_0 e^{V_t}, \quad t \in [0, T]$$

onde S_0 é uma constante chamada valor inicial da ação e V_t é um processo diferenciável em todos os instantes t .

Modelo de Black e Scholes

É um mercado com somente um ativo que pode ser comprado ou vendido em quais quer instantes do intervalo de tempo $[0, T]$ e cujo preço no tempo t é uma variável aleatória S_t que tem a seguinte estrutura:

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}, \quad t \in [0, T]$$

tal que S_0 é uma constante chamada valor inicial da ação, μ e σ são duas constantes referentes ao retorno esperado e a volatilidade da ação respectivamente e W_t , t pertencente ao intervalo $[0, T]$, é um processo chamado movimento Browniano.

4 Problema

Dado os parâmetros do modelo, o tipo da opção e seu preço de exercício, qual o valor justo da opção?

5 Métodos

Precificação de opções pelo princípio de hedging

O princípio de hedging estabelece que o valor inicial da opção devolverá ao lançador a quantia necessária para cumprir sua obrigação frente ao titular no tempo de exercício, qualquer que seja o preço da ação.

Precificação de opções pelo princípio de neutralidade ao risco

A precificação de opção pelo princípio de neutralidade ao risco equivale a procurar as probabilidades que fazem com que aplicar uma quantia em ação dê o lucro médio igual ao lucro obtido em uma aplicação desta quantia no banco.

Precificação de opções por arbitragem

Dado que um mercado não permite arbitragem e o preço de uma opção europeia (compra ou venda) foi determinado (por qualquer método), é dito que esta opção foi determinada pelo princípio da arbitragem, se ao introduzi-lá no mercado este continua não permitindo arbitragem.

6 Resultados

- Coincidência dos preços da opção calculados pelos três métodos;
- Os três métodos determinam não somente o valor inicial da opção mas também seu preço em cada nó;
- O modelo de tempo contínuo com trajetórias diferenciáveis apresenta resultados não realísticos;

7 Conclusão

Utilização do modelo de Black e Scholes na precificação de derivativos.

8 Bibliografia

- [1] V.Belitsky (2000) *Métodos Probabilísticos em Precificação de Derivativos*. ABE-Associação Brasileira de Estatística.
- [2] T.Mikosch (1998) *Elementary stochastic calculus-with finance in view. Advanced Series on Statistical Science Applied Probability*, 6. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, N.I
- [3] S. Dineen (2005) *Probability Theory in Finance A Mathematical Guide to the Black-Scholes Formula*. American Mathematical Society
- [4] S. Dineen (2005) *Probability Theory in Finance A Mathematical Guide to the Black-Scholes Formula*. American Mathematical Society