Traçamento de Raios em Meios Analíticos

Éderson Ribeiro da Silva & Jörg Schleicher

(Aluno) (Orientador)

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, Brasil.

Resumo

Neste trabalho estudamos a solução aproximada da equação da onda acústica pelo método das características, a chamada teoria dos raios. Encontramos a solução para um meio com um gradiente da velocidade constante. Tratamos dos casos onde o gradiente é na direção vertical e em uma direção qualquer. Demonstramos que, nestes casos, os raios podem ser expressos analiticamente.

1 Introdução

Para encontrar soluções aproximadas da equação da onda acústica existem vários métodos. Um método simples e muito usado é o da Teoria dos Raios [1], baseado no método das características, o qual também foi abordado neste projeto. Este método tem sido extensivamente usado ao longo dos últimos anos em várias áreas, mas pricipalmente na sísmica de reflexão, que consiste num ramo da geofísica que faz uso das ondas acústicas ou elásticas produzidas artificialmente por meio de fontes sísmicas a fim de identificar as estruturas geológicas que compõe o interior do terreno estudado. A pricipal aplicação desse método se da na indústria extrativista de petróleo onde há o interesse em se mapear grandes estruturas geológicas a fim de encontrar reservatórios de hidrocarbonetos.

2 A Equação da onda

Uma equação diferencial que aparece frequentemente na física e na matemática aplicada é a equação da onda acústica. Esta equação aparece quase inevitavelmente em qualquer análise matemática dos fenômenos de propagação de ondas num meio acústico.
A equação da onda acústica na sua forma tridimensional é a seguinte:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

onde $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ e $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ é o operador diferencial chamado Laplaciano.

3 Candidata à Solução da Equação da Onda

Com a finalidade de encontrar uma solução para a equação da onda, aplicamos a metodologia da transformada de Fourier. Ou seja, aplicamos a transformada de Fourier em ambos os lados da equação da onda. Resolvemos a EDO obtida no domínio da frequência. E retornamos aplicando a transformada inversa para o domínio do tempo obtendo a seguinte solução para a equação da onda,

$$u(x,t) = f(t - x/c) + g(t + x/c), \tag{2}$$

onde f e g são funções arbitrárias definidas pela assinatura da fonte.
A partir da solução acima e observando a forma das ondas plana e esférica podemos postular uma candidata a solução aproximada da equação da onda. As equações da onda plana e esférica no domínio da frequencia podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} U(\vec{x},\omega) &= F(\omega)e^{\pm i\omega(\vec{n}\cdot\vec{x}/c)}, && (3)\\ U(\vec{x},\omega) &= \frac{1}{r}F(\omega)e^{\pm i\omega r/c}, && (4)\end{aligned}$$

onde r é a variável radial e onde $F(\omega)$ é a transformada de Fourier de $f(t)$.
Podemos então postular como candidata a solução a seguinte expressão:

$$U(\vec{x},\omega) \approx \sum_{k=0}^{\infty} F(\omega)(\pm i\omega)^{-k} A_k(\vec{x}) e^{\pm i\omega\tau(\vec{x})}, \tag{5}$$

onde A_k é amplitude da onda e τ é o tempo de trânsito.
Substituindo a candidata à solução na equação de onda e efetuando alguns cálculos algébricos, obtemos três equações muito importantes para o desenvolvimento do nosso projeto.

4 Equações iconal e do transporte

1. Equação Iconal

$$\|\nabla\tau(\vec{x})\|^2 = \frac{1}{c(\vec{x})^2} \tag{6}$$

Esta equação é responsável por descrever a cinemática da onda, isto é, a posição da frente de onda ao longo do tempo.

2. Equação de Recorrência

$$\nabla^2 A_{k-1} + 2\nabla\tau\cdot\nabla A_k = -A_k\nabla^2\tau \tag{7}$$

Com esta equação podemos determinar os coeficientes A_k.
Para a determinação destas equações utilizamos os conceitos desenvolvidos na teoria dos raios. Por isso, a candidata é uma solução de alta frequência e suas incógnitas são determindas pelas equações 6, 8 e 7.

3. Equação de Transporte
Supondo que a solução pode ser aproximada pelo termo inicial da série infinita, a equação de recorrência se reduz a

$$2\nabla\tau(\vec{x})\cdot\nabla A_0(\vec{x}) + \nabla^2\tau(\vec{x})A_0(\vec{x}) = 0 \tag{8}$$

Esta equação determina a dinâmica da onda, isto é, sua amplitude.

4 Resolução da equação iconal com a velocidade variando linearmente em função da profundidade

Tomamos o plano xy paralelo ao solo e z definindo a profundidade. Teremos então:

$$v(\vec{x}) = v_0 + Cz \tag{9}$$

onde v_0 e C são constantes arbitrárias. Logo a equação a ser tratada foi:

$$\begin{aligned} F(\vec{x},\tau,\vec{\nabla}\tau) &= \tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 - \frac{1}{(v_0+Cz)^2} = 0 && (10)\\ &= p^2 + q^2 + r^2 - \frac{1}{(v_0+Cz)^2} = 0 && (11)\end{aligned}$$

O sistema de EDO's decorrente da aplicação do método das características para este caso tem as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\sigma} &= 2p, \quad \frac{dy}{d\sigma} = 2q, \quad \frac{dz}{d\sigma} = 2r, && (12)\\ \frac{dp}{d\sigma} &= \frac{dq}{d\sigma} = 0, \quad \frac{dr}{d\sigma} = -\frac{2C}{(v_0+Cz)^3}, && (13)\\ \frac{d\tau}{d\sigma} &= 2(p^2+q^2+r^2) = \frac{2}{(v_0+Cz)^2}. && (14)\end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema, conseguimos encontrar as seguintes expressões

$$x = 2p_0\sigma + x_0, \qquad y = 2q_0\sigma + y_0, \tag{15}$$

onde o vetor $(p_0, q_0, r_0$ define a direção inicial do raio.
Além disso,

$$r(\sigma) = \sqrt{(v_0 + Cz(\sigma))^{-2} + K_1} \tag{16}$$

e

$$z(\sigma) = \frac{1}{C}\left[\sqrt{\frac{[2CK_1(\sigma - K_2)]^2 - 1}{K_1}} - v_0\right], \tag{17}$$

Por fim, encontramos a seguinte expressão para o tempo de transito τ da onda:

$$\tau(z) = \frac{1}{2C}\ln\left|\frac{\sqrt{1+K_1(v_0+Cz)^2} - 1}{\sqrt{1+K_1(v_0+Cz)^2} + 1}\right| + T_0, \tag{18}$$

onde

$$K_1 = -(p_0^2 + q_0^2) \tag{19}$$

e

$$K_2 = \frac{\sqrt{1 - (p_0^2+q_0^2)(v_0+Cz_0)^2}}{2C(p_0^2+q_0^2)} \tag{20}$$

5 Resolução da equação iconal com a velocidade variando linearmente em direção arbitrária

Agora temos um caso mais complexo, onde a velocidade varia nos três eixos e é dada por

$$v(\vec{x}) = v_0 + Ax + By + Cz \tag{21}$$

Novamente teremos um sistema de EDO's semelhante ao dado no caso anterior com excessão das equações seguintes

$$\frac{dp}{d\sigma} = -\frac{2A}{v^3(\vec{x})}, \qquad \frac{dq}{d\sigma} = -\frac{2B}{v^3(\vec{x})} \qquad e \qquad \frac{dr}{d\sigma} = -\frac{2C}{v^3(\vec{x})}. \tag{22}$$

Resolvendo esse sistema juntamente com as expressões do caso anterior, obtemos

$$x - x_0 = 2\sigma p_0 + \left[\frac{2D^{1/2}K_1\sigma}{C\sqrt{1-K_1^2}} + \frac{\sqrt{1-(-2DCa^{3/2}\sigma - K_1)^2} - \sqrt{1-K_1^2}}{C^2D^{1/2}a^{3/2}}\right]A, \tag{23}$$

que é semelhante as equações de $y - y_0$ e $z - z_0$.

$$\begin{aligned} \tau(\sigma) = {} & 2\sigma(p_0^2+q_0^2+E^2) + \frac{4D^{1/2}K_1(p_0A+q_0B)}{C\sqrt{1-K_1^2}}\sigma \\ & + \frac{2DK_1^2(A^2+B^2)}{C^2(1-K_1^2)}\sigma + \frac{4D^{1/2}(p_0A+q_0B)}{C}G - 2EG \\ & + \frac{4DK_1(A^2+B^2)}{C^2\sqrt{1-K_1^2}}G + \frac{2D(A^2+B^2+C^2)}{C^2}H && (24)\end{aligned}$$

D, E, G, H e K_1: Constantes que dependem de A, B, C, e p_0, q_0, r_0:

$$\begin{aligned} D &= \frac{C^2}{M^4}\left[(p_0B - q_0A)^2 + (p_0C - r_0A)^2 + (q_0C - r_0B)^2\right] && (25)\\ E &= \frac{1}{M^2}\left[A(p_0C - r_0A) + B(q_0C - r_0B)\right] && (26)\end{aligned}$$

$$K_1 = \frac{-v_0}{M}[Ap_0 + Bq_0 + Cr_0] \quad \text{com} \quad M = \sqrt{A^2+B^2+C^2} \tag{27}$$

$$G = \frac{\sqrt{1-(-2CDa^{3/2}\sigma - K_1)^2} - K_2}{2CDa^{3/2}} \tag{28}$$

$$H = \frac{-1}{J}\ln\left|\frac{\sqrt{1-(J\sigma - K_1)^2}}{1+(J\sigma - K_1)}\right| + \frac{-(J\sigma - K_1) + K_3}{J}. \tag{29}$$

6 Conclusão

Podemos concluir , portanto, que dado um modelo geológico constituido pela velocidade e profundidade de um determinado meio, podemos encontrar o tempo de trânsito de uma onda que percorre esse meio, o que caracteriza a resolução de um problema dito direto.
Percebemos que quanto mais complicado é esse modelo de velocidade, mais complicadas serão as equações que descrevem o tempo de trânsito da onda que percorre esse meio.
De fato, a resolução de um problema direto é o primeiro passo para o entendimento do problema real da indístria de petróleo que é chamado de problema inverso, onde, a partir do tempo de trânsito da onda, devese descobrir a profundidade e um modelo aproximado de velocidade que caracteriza esse meio.

Referências

[1] ČERVENÝ, V., Seismic ray theory, Cambridge University Press, 2001.

[2] MAGALHÃES, M.H., *Estudo de ondas planas em meios acústicos* Relatório de Iniciação Científica (FAPESP), UNICAMP, Campinas (SP), 2000.

[3] SILVA, W.L., *Resolução da Equação de Onda Através da Teoria dos Raios*, Relatório de Iniciação Científica (FAPESP), UNICAMP, Campinas (SP), 2004.