Tópicos de Análise

Eliana Ciarântola Walker — eliana.walker@yahoo.com — Bolsista
Ary Orozimbo Chiacchio — ary@ime.unicamp.br — Orientador
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

SAE/UNICAMP

Espaços métricos – Produto interno – Aproximação

Introdução:

Neste projeto, desenvolvido na área de análise, estudamos os espaços métricos e sua topologia, funções contínuas e uniformemente contínuas, e algumas aplicações, como o Teorema da Melhor Aproximação em espaços com produto interno e o Teorema da Melhor Aproximação de Weierstrass.

Conceitos Básicos:

Definição: *Sejam M um conjunto não vazio e d uma função de $M \times M$ em $\mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:*

(d1) $d(x,y) \geq 0$
(d2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(d3) $d(x,y) = d(y,x)$
(d4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \qquad \forall\, x,\, y,\, z \in M.$

Então d é uma métrica e (M,d), um espaço métrico.

Definição: *Sejam E, F espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma transformação linear é uma função $T : E \to F$ que cumpre as seguintes condições:*

(T1) $T(u+v) = T(u) + T(v)$
(T2) $T(\alpha u) = \alpha T(u) \qquad \forall\, u,\, v \in E$ *e* $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}$.

Sejam M e N espaços métricos.

• Uma função $f : M \to N$ é contínua em $p \in M$ se, dado $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $d(x,p) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(p)) < \epsilon$. Dizemos que f é contínua se o for em todos os pontos de M.

• Uma função $f : M \to N$ é uniformemente contínua se dado $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que $d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$, $\forall\, x,\, y \in M$.

• Uma função $f : M \to N$ é lipschitziana se existir uma constante $c > 0$ (constante de Lipschitz) tal que:

$$d(f(x), f(y)) \leq c d(x,y) \qquad \forall\, x,\, y \in M.$$

Alguns resultados:

• (Continuidade por seqüências) Uma função $f : M \to N$ é contínua em $p \in M$ se, e somente se, $(x_n) \subset M$ tal que $x_n \to p \Rightarrow f(x_n) \to f(p)$.

• Sejam d e d_1 métricas sobre M para as quais $\exists\, r,\, s \in \mathbb{R}$, r, $s > 0$, tais que: $rd(x,y) \leq d(x,y) \leq sd(x,y)$, quaisquer que sejam $x,\, y \in M$. Então $f : (M,d) \to (N,d')$ é uniformemente contínua $\Leftrightarrow$ $f : (M,d_1) \to (N,d')$ é uniformemente contínua.

• Se E e F são espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{R}$ e se $T : E \to F$ é uma transformação linear, então são equivalentes as seguintes afirmações:

(a) T é contínua
(b) T é contínua na origem
(c) Existe um número real $k > 0$ tal que $||T(u)|| \leq k||u||$, $\forall\, u \in E$. (d) T é lipschitziana.

Resultado importante:

Teorema da Aproximação de Weierstrass: *Seja f uma função real uniformemente contínua definida em um intervalo fechado $[a,b]$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe um polinômio p com coeficientes reais tal que $|f(x) - p(x)| < \epsilon$, $\forall\, x \in [a,b]$.*

Para tanto, usamos os polinômios de Bernstein de grau n associados à função $f(x)$, definidos por:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\tfrac{i}{n}\right) B_i^n(x)$$

onde

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{(n-i)}$$

Aplicação:

Espaços com produto interno: Num espaço vetorial E sobre $\mathbb{R}$, dotado de um produto interno $(u,v) \mapsto \langle u,v \rangle$, podemos definir a norma de um vetor $u \in E$ do seguinte modo:

$$||u||^2 = \langle u,u \rangle.$$

Definição: *Um conjunto de vetores num espaço com produto interno é ortogonal se os vetores o forem dois a dois. Se a norma de cada vetor de um conjunto ortogonal for igual a 1, o conjunto é ortonormal.*

• Se $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base ortonormal de um espaço com produto interno V e u é um vetor qualquer de V, então:

$$u = \langle u, v_o \rangle v_0 + \langle u, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle u, v_n \rangle v_n$$

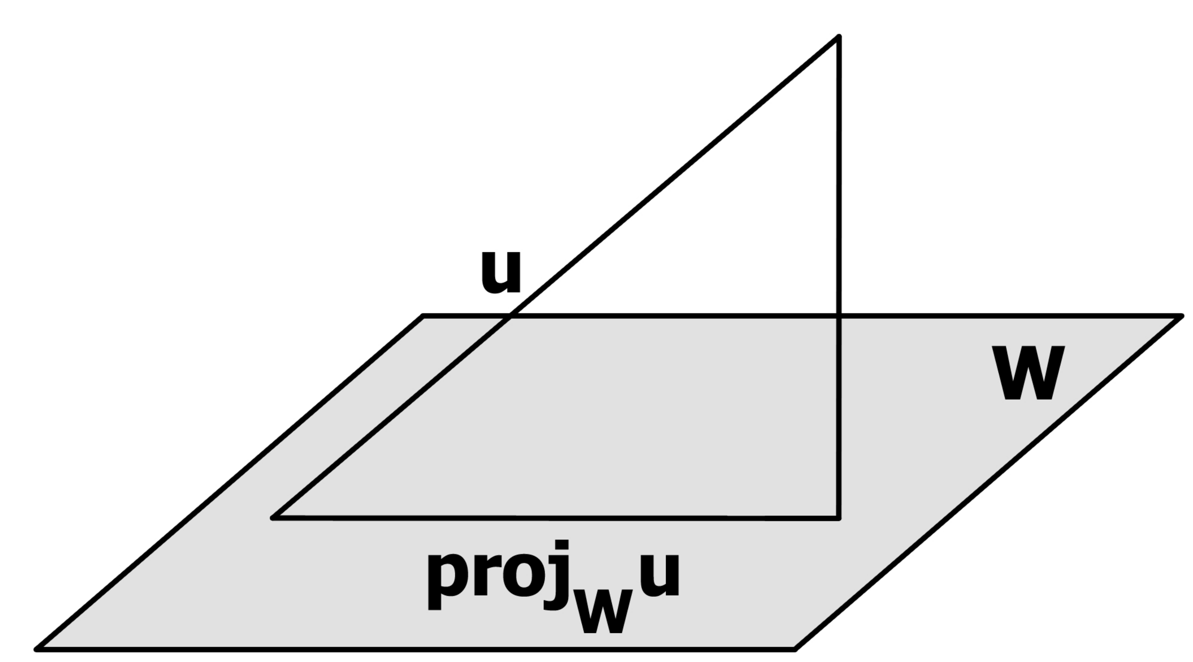
• Todo espaço vetorial com produto interno E é um espaço vetorial normado. Assim, podemos definir em E a seguinte métrica:

$$d(u,v) = ||u - v|| \qquad \forall\, u,\, v \in E.$$

Definição: *Se W é um subespaço de dimensão finita de um espaço com produto interno V, se $\{v_o, v_1, \ldots, v_r\}$ é uma base ortonormal de W e se u é um vetor qualquer de V, então a projeção ortogonal de $u \in V$ sobre W é o vetor:*

$$\text{proj}_W u = \langle u, v_o \rangle v_0 + \langle u, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle u, v_r \rangle v_r.$$

Teorema de melhor aproximação: Se W é um subespaço de dimensão finita de um espaço com produto interno V e se u é um vetor de V, então $\text{proj}_W u$ é a melhor aproximação de u em W, no seguinte sentido:



$$||u - \text{proj}_W u|| \leq ||u - w||, \qquad \text{para todo vetor } w \text{ em } W.$$

Bibliografia

[1] Barreto, A.C., Tópicos de Análise, IMPA, 1971.
[2] Domingues, H.H., Espaços Métricos e Introdução à Topologia, Atual ed., 1982.
[3] Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applications, J. Wiley, 1978.
[4] Simmons, G.F., Introduction to Topology and Modern Analysis, McGraw- Hill, 1963