Teoria de Representações e Geometria Algébrica

Felipe Augusto Moreira da Silva orientador: Prof. Dr. Marcos Jardim
Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
f043360@dac.unicamp.br

1 Matriz de Cartan

Definição. Uma matriz A é definida como matriz de Cartan generalizada se:

i) $a_{ii} = 2$ ii) $a_{ij} \in -Z_+$ se $i \neq j$ iii)$a_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ji} = 0$

Dado um espaço vetorial $E = R^n$ com base canônica $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ definimos a forma bilinear $(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_n^t.A.\alpha_2$, onde A é uma matriz de Cartan (a forma bilinear é produto interno se e somente se A satisfaz (iv)). Logo, seja:

$$r_i(\lambda) = \lambda - 2\frac{(\lambda,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}.\alpha_i$$

Reflexão ortogonal a $[\alpha_i]^{\perp}$ e o subgrupo W de automorfismos $Aut(E)$ no espaço vetorial E gerado pelos r_i é chamado de o grupo de Weyl de A Podemos definir as raízes de uma matriz de Cartan.

Definição. Definimos raízes reais de uma matriz de Cartan como os elementos de $R_e^* = \bigcup_{i=1}^n W.\alpha_i$, que satisfazem $(\alpha_i, \alpha_i) > 0$, e as raízes reais positivas são $R_e^+ = R_e^* \bigcap Q^+$, onde $Q^+ = \sum_{i=1}^n Z_+.\alpha_i$. As raízes imaginárias positivas são elementos de R_{im}^+, onde $R_{im}^+ = \bigcup_{w \in W} W.k$, W é o grupo de Weyl e $K = \{\alpha \in Q^+\}$: supp(α) é conexo e $(\alpha, \alpha_i) \leq 0 \forall i\}$, com $(\alpha_i, \alpha_i) \leq 0$. Definimos $supp(\alpha) = \alpha_i : (\alpha, \alpha_i) \neq 0$.

2 Quiver e Representações de Quiver

Definição. Um Quiver (finito) Q consite de dois conjuntos fínitos Q_0(dos vértices) e Q_1(das flechas) e duas funções:

$$h, t : Q_1 \rightarrow Q_0.$$

(head e tail)
A flecha $a \in Q_0$ começa no vértice t(a) e termina no vértice h(a).

Definição. Uma representação de dimensão finita do quiver Q consiste de um conjunto de espaços vetoriais de dimensão finita (sobre o corpo k) $\{W_v | v \in Q\}$ e um conjunto de funções $k-$lineares $\{\phi_a : W_{t(a)} \rightarrow W_{h(a)}\}$.

Definição. Um morfismo f da representação $(\{W_v\}, \{\phi_a\})$ para representação $(\{V_v\}, \{\psi_a\})$ consite de funções lineares $f_v : W_v \rightarrow U_v$, um para cada vértice v, tais que, para cada flecha a, temos $f_h(a) \circ \phi_a = \psi_a \circ f_t(a)$, isto é, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} V_{t(a)} \arrow[r, "\phi_a"] \arrow[d, "f_{t(a)}"'] & V_{h(a)} \arrow[d, "f_{h(a)}"] \\ W_{t(a)} \arrow[r, "\psi_a"'] & W_{h(a)} \end{tikzcd}$$

Definição. Dado uma representação $(\{W_v\}, \{\phi_a\})$, uma subrepresentação de um quiver consiste em uma representação $(\{V_v\}, \{\psi_a\})$ onde $V_v \subseteq W_v$ e $f_h(a) \circ \phi_a = \psi_a \circ f_t(a)$, logo o diagrama acima comuta. Com isso concluímos que f_v é injetora para todo $v \in Q_0$.

Definição. A soma direta $W \oplus V$ de duas representações $(\{W_v\}, \{\phi_a\})$ e $(\{V_v\}, \{\psi_a\})$ é tal que $(W \oplus V)_v = W_v \oplus V_v$ e $(\phi \oplus \psi)_a = \phi_a \oplus \psi_a : W_t(a) \oplus V_t(a) \rightarrow W_h(a) \oplus V_h(a)$ obedece $(\phi \oplus \psi)_a((w, v)) = (\phi_a(w), \psi_a(u))$. Uma representação $(\{V_v\}, \{\varphi_a\})$ é dita simples (ou irredutível) se suas únicas subrepresentações são a trivial e a própria $(\{V_v\}, \{\varphi_a\})$. Uma representação é dita decomponível se puder ser escrita como a soma direta de duas representações não triviais. Toda representação de dimensão finita de um quiver pode ser decomposta de forma única como soma de representações de imdecomponíveis a menos de isomorfismos.

Abaixo apresentaremos o teorema de Kac o qual relaciona as raízes de uma matriz de Cartan com a dimensão de um quiver.

Teorema de Kac. *Existe representação indecomponível com vetor dim $= \vec{d}$ se e somente se dim $= \vec{d}$ é raiz positiva de A.*

3 Quiver de Kronecker

Agora vamos aplicar a teoria de Quivers e raízes de uma Matriz de Cartan no quiver abaixo:

$$\bullet \underset{h}{\overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\vdots}}} \bullet \qquad (1)$$

A matriz associada de Cartan será.

$$\begin{bmatrix} 2 & -N \\ -N & 2 \end{bmatrix}$$

Agora podemos achar o sitema de raízes da matriz de Cartan acima. Com a base $\beta = (\alpha_1, \alpha_2)$ de R^2, calculamos a forma bilinear apresentada sobre a base.

$(\alpha_1, \alpha_1) = 2$, $(\alpha_1, \alpha_2) = -N$ e $(\alpha_2, \alpha_2) = 2$.

Então encontramos as reflexões que formam o grupo de Weyl, será aplicada a reflexão na base β para encontrar a matriz de cada reflexão.

$r_1(\alpha_1) = -\alpha_1$, e, $r_1(\alpha_2) = \alpha_2 + N\alpha_1$

Logo teremos a matriz para r_1:

$$[r_1] = \begin{bmatrix} -1 & N \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para r_2 temos:

$r_2(\alpha_1) = \alpha_1 - N\alpha_2$, $r_2(\alpha_2) = -\alpha_2$

E a matriz para r_2:

$$[r_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ N & -1 \end{bmatrix}$$

Agora podemos descrever o grupo de Weyl para esse caso.
O grupo de Weyl pode ser descrito pelos seguintes elementos e relações:

$\{\mathbf{1}, r_1, r_2, (r_1.r_2)^p, (r_2.r_1)^p, (r_1.r_2)^p.r_1, (r_2.r_1)^p.r_2\}$, com $p \in \mathbf{N}^*$ e $\mathbf{1} = identidade$.

Onde $r_j.r_j = \mathbf{i}$ para $j = 1, 2$, $(r_1.r_2)^{-p} = (r_2.r_1)^p$ para $p \in \mathbf{N}^*$, $((r_1.r_2)^p.r_1)^2 = \mathbf{i}$ e $((r_2.r_1)^p.r_2)^2 = \mathbf{i}$ para $p \in \mathbf{N}^*$.

O grupo de Weyl é isomorfo ao grupo diedral D_m, definido da seguinte forma:
$D_\infty =< x, y | x^2 = y^2 = (x.y)^n = 1 > ou D_\infty =< r, f | r^n = f^2, f.r.f = r^{-1} >$, e tambem temos que D_∞ é isomórfico ao $\mathbf{Z} \propto \mathbf{Z}_2$

Vamos analisar o caso de maior interesse, isto é para $N \geq 3$.

Como já temos $\mathbf{1}$,r_1 e r_2 podemos calcular $r_1.r_2$ e $r_2.r_1$:

$$r_1.r_2 = \begin{bmatrix} N^2 - 1 & -N \\ N & -1 \end{bmatrix}, r_2.r_1 = \begin{bmatrix} -1 & N \\ -N & N^2 - 1 \end{bmatrix}$$

Logo podemos encontrar $(r_1.r_2)^p$ e $(r_2.r_1)^p$.
Vamos primeiro decompor $r_1.r_2 = Q.P.Q^{-1}$, onde P é a matriz dos autovalores.
Calculando os autovalores e os autovetores.

$$\begin{vmatrix} N^2 - 1 - \lambda & -N \\ N & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (N^2 - 1 - \lambda) * (-1 - \lambda) + N^2 = \lambda^2 + (2 - N^2)\lambda + 1 = 0$$

Logo termos os seguintes autovalores:

$$\lambda_1 = \frac{-N^2+N\sqrt{N^2-4}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{N^2-2-N\sqrt{N^2-4}}{2}$$

E portanto a matriz $P = \begin{bmatrix} \frac{-N^2+N\sqrt{N^2-4}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{N^2-2-N\sqrt{N^2-4}}{2} \end{bmatrix}$

Calculando as matrizes Q e Q^{-1} achando os autovetores resolvendo o seguinte sistema:$(r_1.r_2).\delta_i = \lambda_i.\delta_i$, onde $\delta_i = (\delta_1, \delta_2)$ e λ_i autovalor correspondente, então chegamos as matrizes:

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ N - N\sqrt{N^2 - 4} & N + N\sqrt{N^2 - 4} \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} (N + \sqrt{N^2 - 4})/4\sqrt{N^2 - 4} & -1/2\sqrt{N^2 - 4} \\ (-N + \sqrt{N^2 - 4})/4\sqrt{N^2 - 4} & 1/2\sqrt{N^2 - 4} \end{bmatrix}$$

Portanto podemos calcular $(r_1.r_2)^p = Q.P^p.Q^{-1}$,
Seja $(r_1.r_2)^p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, calculando a_{ij} e substituindo $(N^2 - 2 + N\sqrt{N^2 - 4}) = (\frac{N^2-4+2N\sqrt{N^2-4}+N^2}{2}) = \frac{(N+\sqrt{N^2-4})^2}{2}$ chegamos que:

$$a_{11} = (\frac{1}{\sqrt{N^2-4}})[(\frac{N+\sqrt{N^2-4}}{2})^{2p+1} - (\frac{(N-\sqrt{N^2-4})^2}{2})^{2p+1}]$$

$$a_{21} = (\frac{1}{\sqrt{N^2-4}})[(\frac{N+\sqrt{N^2-4}}{2})^{2p} - (\frac{N-\sqrt{N^2-4}}{2})^{2p}]$$

$$a_{12} = (\frac{1}{\sqrt{N^2-4}})[(\frac{N-\sqrt{N^2-4}}{2})^{2p} - (\frac{N+\sqrt{N^2-4}}{2})^{2p}] = -a_{21}$$

$$a_{22} = (\frac{1}{2\sqrt{N^2-4}})[(\frac{N-\sqrt{N^2-4}}{2})^{2p-1} - (\frac{N+\sqrt{N^2-4}}{2})^{2p-1}]$$

Escolhendo $2p = k$ teremos $a_k = (\frac{1}{\sqrt{N^2-4}})[(\frac{N+\sqrt{N^2-4}}{2})^k - (\frac{N-\sqrt{N^2-4}}{2})^k]$, logo $a_{11} = a_{k+1}$, $a_{21} = a_k$, $a_{12} = -a_k$ e $a_{22} = -a_{k-1}$, e assim teremos $(r_1.r_2)^p$, $(r_2.r_1)^p = (r_1.r_2)^{-p}$ e $(r_1.r_2)^p.r_1$ e $(r_2.e_1)^p.r_2$.

$$(r_1.r_2)^p = \begin{bmatrix} a_{k+1} & -a_k \\ a_k & -a_{k-1} \end{bmatrix}, (r_2.r_1)^p = \begin{bmatrix} -a_{k-1} & a_k \\ -a_k & a_{k+1} \end{bmatrix}$$

$$(r_1.r_2)^p.r_1 = (r_1.r_2)^p = \begin{bmatrix} a_{k+1} & -a_k \\ a_k & -a_{k-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & N \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{k+1} & a_{k+2} \\ -a_k & a_{k+1} \end{bmatrix}$$

$$(r_2.r_1)^p.r_2 = (r_2.r_1)^p = \begin{bmatrix} -a_{k-1} & a_k \\ -a_k & a_{k+1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ N & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{k+1} & -a_k \\ a_{k+2} & -a_{k+1} \end{bmatrix}$$

Agora com o grupo de Weyl descrito podemos achar as raízes reias positivas, basta aplicar os elementos do grupo de Weyl a base $\alpha = ((1, 0), (0, 1))$ e pegar somente os vetores com coordenadas positivas, logo teremos

$$R_e^+ = \{(1, 0), (0, 1), (1, N), (N, 1), (a_k, a_{k+1}), (a_{k+1}, a_k), (a_{k+2}, a_{k+1}), (a_{k+1}, a_{k+2})\}.$$

Como $a_0 = 0$,$a_1 = 1$ e $a_2 = N$ podemos resumir as raízes reais positivas à $R_e^+ = \{(a_k, a_{k+1}), (a_{k+1}, a_k) | a_k = (\frac{1}{\sqrt{N^2-4}})[(\frac{N+\sqrt{N^2-4}}{2})^k - (\frac{N-\sqrt{N^2-4}}{2})^k]\}$

4 Forma de Tits

A forma de Tits é definida como $q(\alpha, \alpha) = 1/2(\alpha, \alpha)$, onde $(\alpha, \alpha) = \alpha^t.A.\alpha$ com A a matriz de Cartan, podemos relacionar as raízes reais positivas do quiver de Kronecker com a forma de Tits sendo que α é raiz real positiva se e somente $q(\alpha, \alpha) = 1$, pois sendo $\alpha = (r, s)$ temos o seguinte:

$$q(\alpha, \alpha) = \begin{bmatrix} r & s \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -N \\ -N & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = r^2 - Nrs + s^2 = 1$$

Temos a resolução da equação $r^2 - Nrs + s^2 = 1$ na referência [2] página 6 lema 3.4, tal que a solução será $(r, s) = (a_k, a_{k+1})$ ou $(r, s) = (a_{k+1}, a_k)$, que são as raízes reais positivas do quiver de Kronecker, assim fica estabelicida a relação das raízes positivas com a forma de Tits.

5 Bibliografia

[1] A. King, Moduli of representations of finite dimensional álgebras. Quart J. Math. 45, 515-530 (1994).

[2] Brambilla, Simplicity of generic Steiner bundles