MARTINGAIS E SÉRIES DE HAAR E DE WALSH

Gustavo Henrique Milaré

E-mail: gugamilare@gmail.com

Bolsista

Sergio Antonio Tozoni

E-mail: tozoni@ime.unicamp.br

Orientador

IMECC – CNPq - PIBIC

Palavras-Chave: Martingais, Séries de Haar, Séries de Walsh

Introdução

As funções de Haar e as funções de Walsh formam dois sistemas ortonormais completos do espaço vetorial $L^2([0,1))$. Além disso, as séries de Haar e as séries de Walsh de uma função convergem para esta função. As séries de Walsh podem ser utilizadas em várias situações, como transmissão de dados, filtração, enriquecimento de imagem, análise de sinais e reconhecimento de padrão. As funções de Walsh são fáceis de serem implementadas e podem ser usadas mesmo com pouco espaço de armazenagem em computadores de alta velocidade. Por exemplo, para economia de peso, as séries de Walsh foram usadas na nave espacial *Mariner*, que explorou a superfície de Marte.

Esperança Condicional

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida; por exemplo, um espaço de probabilidade. A partir deste espaço, é possível definir integral para uma família de funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$, que é denotada por $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. A família de funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $|f|^p$ é integrável, $1 \le p < \infty$, é denotada por $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Sejam $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e $\mathcal{F}$ uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}$. Podemos concluir a existência de uma função única em q.t.p.$[\mu]$ $E[f|\mathcal{F}] \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ (a *Esperança Condicional* de f com respeito a $\mathcal{F}$) que satisfaz, para todo $A \in \mathcal{F}$,

$$\int_A f\, d\mu = \int_A E[f|\mathcal{F}] \, . \, d\mu.$$

Martingais

Sejam um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, uma seqüência crescente de sub-σ-álgebras $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}$ e uma seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $L^1(\Omega, \mathcal{A})$. Se $f_n = E[f_{n+1}|\mathcal{F}_n]$, então f_n é dita um martingal com respeito a $(\mathcal{F}_n)$.

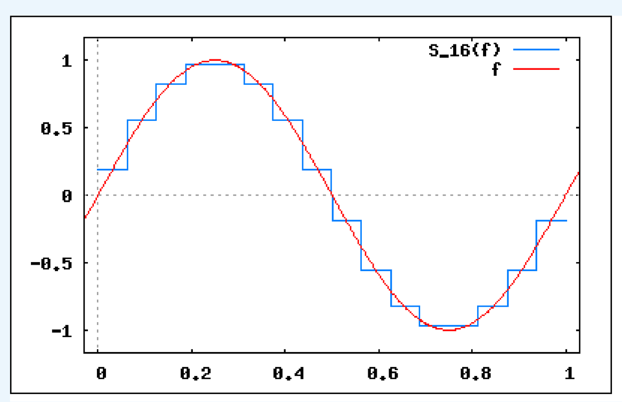
Tomando uma função $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $f_n = E[f|\mathcal{F}_n]$ é um martingal. Dizemos que o martingal é *fechado* (por f). Se $\mathcal{A}$ é gerada pela seqüência $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, o martingal $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fechado por f converge para f.

Séries de Haar

Por simplicidade, restringiremo-nos ao espaço $\Omega = [0,1)$ com a medida de Lebesgue λ. Sejam $n = 2^k + r$ e $i \in \mathbb{N}$ com $0 \le r < 2^k$; definamos

$$\mathcal{Q}_i^{(2^k+r)} = \begin{cases} \left[\frac{i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^{k+1}}\right) \text{ se } 1 \le i \le 2r, \\ \left[\frac{i-r-1}{2^k}, \frac{i-r}{2^k}\right) \text{ se } 2r < i \le n. \end{cases}$$

Estes intervalos são chamados de *intervalos diádicos*. Agora, definimos $\mathcal{Q}_n = \sigma\left(\mathcal{Q}_1^{(n)}, \ldots, \mathcal{Q}_n^{(n)}\right)$, isto é, a σ-algebra gerada por $\mathcal{Q}_i^{(n)}$. A seqüência $(\mathcal{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e gera a σ-álgebra de Lebesgue.



Soma parcial de ordem 16 da série de Walsh associada à função $f(x) = \operatorname{sen}(2\pi x)$. Esta soma coincide com a soma parcial da série de Haar de mesma ordem.

Agora, definimos as funções de Haar pondo

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2^k} & \text{se } x \in \mathcal{Q}_{2r-1}^{(n)}, \\ -\sqrt{2^k} & \text{se } x \in \mathcal{Q}_{2r}^{(n)}, \\ 0 & \text{caso contrário}, \end{cases} .$$

Dada uma função $f \in L^p([0,1))$, $1 \le p < \infty$, obtemos a série de Haar associada a f, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \hat{f}_n \psi_n$, onde

$$\hat{f}_n = \int_0^1 f \cdot \psi_n \, d\mu$$

Também temos que $S_n(f, \mathcal{H}) = \sum_{i=1}^n \hat{f}_i \psi_i = E[f|\mathcal{Q}_n]$, isto é, a seqüência das somas parcias da série de Haar é um martingal fechado por f, e portanto esta série converge para f em $L^p([0,1))$. Ainda mais, se f é contínua, a convergência é uniforme. Como conseqüência desta convergência, as funções de Haar $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são uma base e, portanto, formam um sistema ortonormal completo de $L^2([0,1))$.

Séries de Walsh

Dados $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [0,1)$, existe um único $p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{p}{2^{n+1}} \le x < \frac{p+1}{2^{n+1}}$. Definimos o *sistema de Rademacher* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

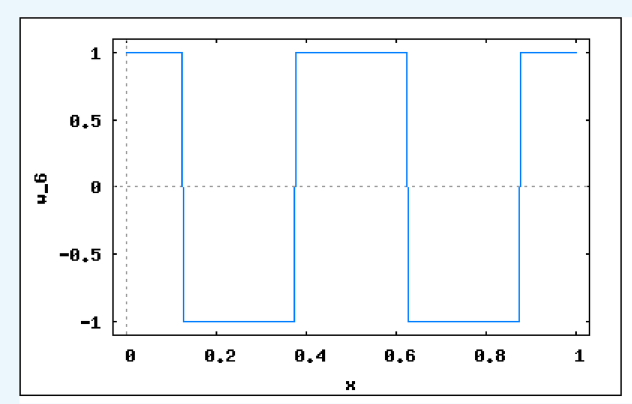
$$r_n(x) = (-1)^p$$

e definimos o *sistema de Walsh(-Paley)* $(\omega_n)_{n\in\mathbb{P}}$ por

$$\omega_n = \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}$$

onde $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é a única seqüência (chamada de *coeficientes binários* de n) com $n_k \in \{0,1\}$ que satisfaz $n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k n_k$.

Observe que as funções de Walsh são os produtos finitos entre as funções de Rademacher.



A função de Walsh $\omega_6 = \rho_1.\rho_2$.

Os *coeficientes de Walsh-Fourier* de uma função $f \in L^1([0,1))$ são dados por

$$\hat{\hat{f}}_n = \int_{[0,1)} f.\omega_n \, d\lambda$$

para cada $n \in \mathbb{P}$.

A *série de Walsh* de uma função $f \in L^1([0,1))$ é definida como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{\hat{f}}_n.\omega_n$$

Logo $S_{2^n}(f, \mathcal{W}) = \sum_{k=0}^n \hat{\hat{f}}_k.\omega_k = E[f|\mathcal{Q}_{2^n}]$ onde $\mathcal{Q}_{2^n}$ foram definidos na seção sobre Séries de Haar. Esta soma parcial coincide com a soma parcial de ordem 2^n da série de Haar desta mesma função. Ou seja, a subseqüência $S_{2^n} f$ converge para f, e esta convergência é uniforme se f for contínua. Como conseqüência, as funções de Walsh $(\omega_n)_{n\in\mathbb{P}}$formam um conjunto ortonormal completo em $L^2([0,1))$.