Três Teoremas Clássicos em Análise Matemática

Henrique da Costa Figo [1]
[1] henriquefigo@yahoo.com.br

Daniela Mariz Silva Vieira [2]
[2] danim@ime.unicamp.br

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, Brasil.

Agência financiadora: FAPESP
Palavras-chave: Função contínua - Convergência pontual - Convergência uniforme

INTRODUÇÃO:

O entendimento dos resultados clássicos em Análise Matemática não se dá apenas pelas hipóteses / teses bem elaboradas dos mesmos, mas também com a construção de contra exemplos que, muitas vezes, fogem de nossa intuição. Foram estudados contra-exemplos que, em sua totalidade, ressaltam a importância singular de cada hipótese em Teoremas conhecidos como, por exemplo, a existência de uma função contínua que não é monótona em nenhum subconjunto da reta.

METODOLOGIA:

Durante o projeto, diversos conceitos em Análise Matemática foram vistos, tais como seqüências e séries (de números reais e de funções), limites de funções e funções contínuas.
Com relação a cada um dos tópicos abordados, foram estudados exemplos e, principalmente, contra-exemplos, que enfatizavam claramente toda a teoria ali desenvolvida.

RESULTADOS E DISCUSSÕES:

Uma função contínua que não é monótona em nenhum intervalo.

Sempre que esboçamos um gráfico de uma função contínua, somos induzidos a enxergar intervalos nos quais o comportamento da mesma se dá de forma monótona, isto é, ou a função cresce, descresce ou se mantém constante. De fato, eis a definição de função monótona:

Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ chama-se monótona não-decrescente quando para $x, y \in X$, $x < y \Rightarrow f(x) \le f(y)$. Se $x < y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$, f diz-se monótona não-crescente.

Considere $f_1(x) = |x|$, para $|x| \le \frac{1}{2}$. Para outros valores de x, considere a extensão períodica contínua de $f_1(x)$, com período 1 . Para $n > 1$ defina $f_n(x) = 4^{-n+1} \cdot f_1(4^{n-1}x)$, cujo período é 4^{-n+1} e tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n assume valor máximo $\frac{1}{2} \cdot 4^{-n+1}$. De fato, $f_n(x + 4^{-n+1}) = 4^{-n+1} f_1(4^{n-1}(x+4^{-n+1})) = 4^{-n+1} f_1(4^{n-1}x+1) = 4^{-n+1} f_1(4^{-n+1}x) = f_n(x)$, o que implica a assertiva do período. Agora veja que qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, f_n recorre sempre a $f_1(x)$, cujo valor máximo, $\forall x \in \mathbb{R}$ é $\frac{1}{2}$.

Definimos agora a seguinte soma:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(4^{-n+1}x)}{4^{-n+1}}.$$

Pelo Teste de Weierstrass, a função definida acima converge uniformemente em seu domínio. Como cada f_n é contínua, segue que esse limite também é uma função contínua.

Qualquer que seja o ponto a na forma $a = k \cdot 4^{-m}$, onde $k \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}$ temos $f_n(a) = 0$ para $n > m$. Com efeito, $f_n(a) = 4^{-n+1} \cdot f_1(4^{n-1} \cdot k \cdot 4^{-m}) = 4^{-n+1} \cdot f_1(4^{n-m-1} \cdot k) = 0$, pois $4^{n-m-1} \in \mathbb{Z}$ e a função f_1 se anula nesse conjunto.

Agora defina para todo $m \in \mathbb{N}$ o número $h_m = 4^{-2m-1}$. Se $n > 2m+1$, de forma análoga a anterior, mostramos que $f_n(a + h_m) = 0$. Observe então que

$$f(a) = f_1(a) + \ldots + f_m(a) \text{ e } f(a + h_m) = f_1(a + h_m) + \ldots + f_{m+1}(a + h_m) + \ldots + f_{2m+1}(a + h_m).$$

Logo

$$f(a+h_m) - f(a) = [f_1(a+h_m) - f_1(a)] + \ldots + [f_m(a+h_m) - f_1(a)] + f_{m+1}(a+h_m) + \ldots + f_{2m+1}(a+h_m).$$

Mostraremos que, para a igualdade acima, vale sempre $f(a+h_m) - f(a) > 0$ Para isso seja $a = k \cdot 4^{-m}$, onde $k = 1$. Esse fato simplifica os cálculos mas, de modo algum, tira a generalidade da verificação, pois a função periódica exige o mesmo comportamento em qualquer intervalo genérico.

Então $f_1(a) = f_1(4^{-m}) = 4^{-m}$ e $f_1(a + h_m) = f_1(4^{-m} + 4^{-2m-1}) = 4^{-m} + 4^{-2m-1}$, de modo que

$$f_1(a + h_m) - f_1(a) = 4^{-2m-1} = h_m.$$

Procedendo o raciocínio temos que $f_m(a + h_m) - f_m(a) = h_m$, logo

$$\sum_{n=1}^{m} [f_n(a + h_m) - f_n(a)] = m h_m.$$

Resta analisarmos o comportamento da outra soma.

Seja então

$$f_{m+1}(a+h_m) = 4^{-m} \cdot f_1(4^m \cdot (4^{-m} + 4^{-2m-1})) = 4^{-m} \cdot f_1(1 + 4^{-m-1}) = 4^{-m} \cdot (1 + 4^{-m-1}) = 4^{-m} + 4^{-2m-1} > h_m.$$

De forma análoga temos que $f_{m+2}(a+h_m), \ldots, f_{2m+1}(a+h_m) > h_m$. Juntando as duas informações obtidas temos a seguinte desigualdade:

$$f(a + h_m) - f(a) > 2m h_m > 0.$$

Ou seja, $f(a + h_m) > f(a)$.

Um procedimento idêntico ao feito, mostra que $f(a - h_m) > f(a)$, ou seja, na mesma vizinhança existem pontos $a + h_m > a$ e $a - h_m < a$ tais que os mesmos não satisfazem a condição de monotonicidade.

Observe que esse tipo de vizinhança formada pelos números do tipo $k \cdot 4^{-m}$ formam um conjunto denso na reta que, em outras palavras, significa que, dado qualquer intervalo nesse conjunto, *sempre* conseguimos pontos sob essa forma. Portanto pode se concluir que f não é monótona em nenhum intervalo da reta, mesmo sendo contínua.

CONCLUSÃO:

Quando se estuda Análise Matemática, temos que, muitas vezes, deixar nossa intuição de lado. Situações nas quais imaginávamos o óbvio, foram fortemente reprovadas pelos contra exemplos apresentados. E é exatamente na sutileza das hipóteses dos Teoremas onde encontramos toda a consistência de uma teoria ampla, clássica e extremamente importante, não só para a matemática, mas para a ciência como um todo.

BIBLIOGRAFIA: [1] B. R. Gelbaum e J. M. Olmsted, *Counterexamples in Analysis*. Holden-Day, Inc. 1964.