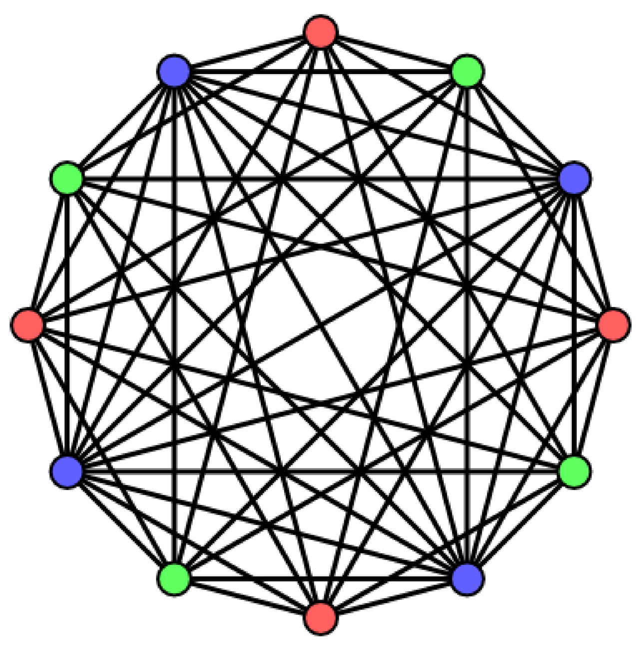
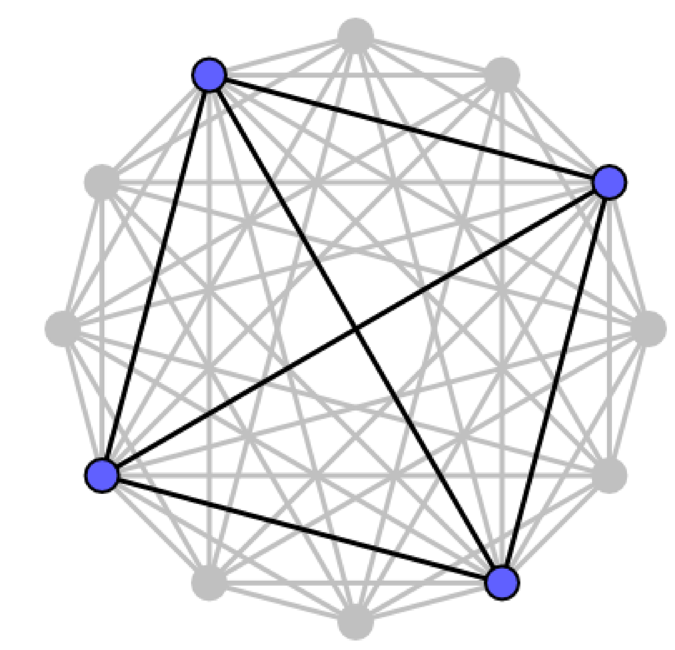


# A CONJECTURA DA RECONSTRUÇÃO DE GRAFOS




Igor Carboni Oliveira — Bolsista

Prof. Dr. Orlando Lee — Orientador

INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS



Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo

Teoria de Grafos - Combinatória - Reconstrução de Estruturas


## 1 Introdução

A Conjectura da Reconstrução de Grafos foi proposta por S.M. Ulam e P.J. Kelly, em 1941. Desde então, diversas técnicas foram desenvolvidas e resultados parciais foram obtidos. Apesar disso, após quase setenta anos de pesquisa, o problema permanece em aberto.

**Definição.** *Um* **subgrafo primal** *de um grafo simples $G$ é um subgrafo obtido de $G$ a partir da remoção de um de seus vértices. O* **baralho** *de um grafo G é a família dos subgrafos primais de G (sem nome nos vértices), chamados de* **cartas** *do baralho. Uma* **reconstrução** *de um grafo G é um grafo H com o mesmo baralho que G. Um grafo G é* **reconstrutível** *se toda reconstrução de G é isomorfa a G.*

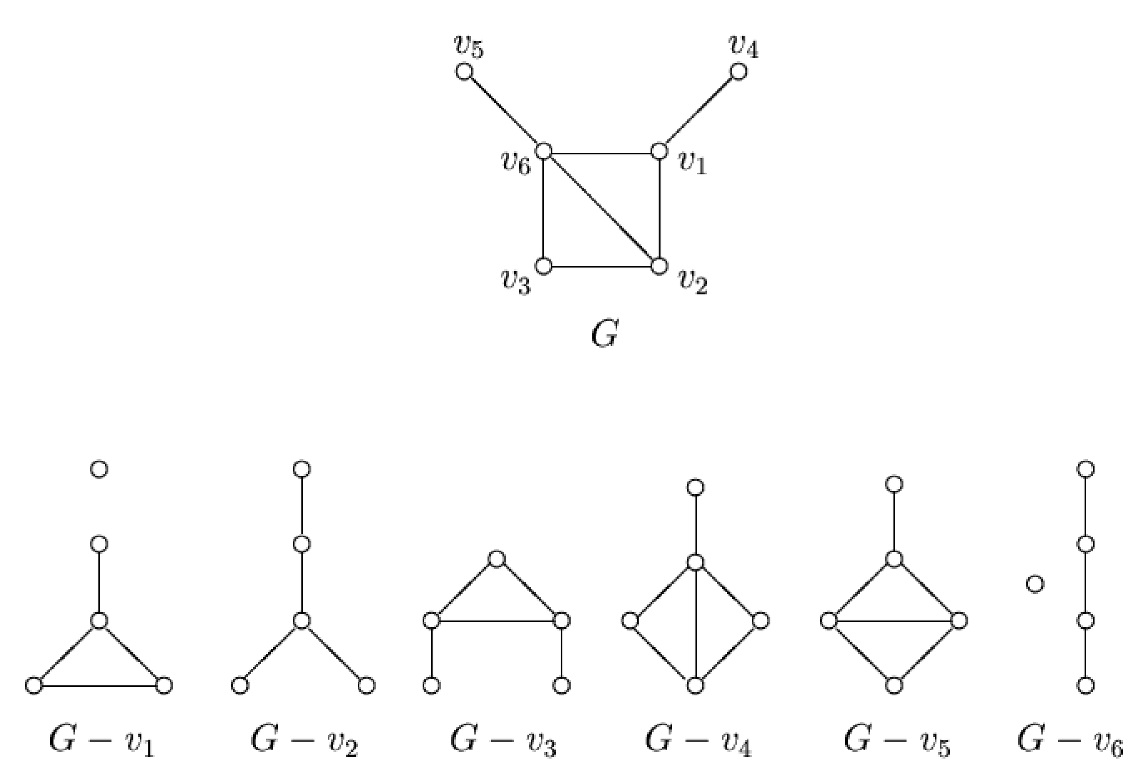




**Figura 1. Exemplo de um grafo e seu baralho.**

Informalmente, gostaríamos de saber se um baralho válido determina de forma única a classe de isomorfismo do grafo original.

**Conjectura da Reconstrução de Grafos.** *Todo grafo simples com pelo menos três vértices é reconstrutível.*

## 2 Resultados Fundamentais

Um resultado muito útil para a teoria da reconstrução foi obtido por Kelly em 1957.

**Definição.** *Uma função é* **reconstrutível** *se, para qualquer grafo G, ela possui o mesmo valor para todas as reconstruções de G.*

**Definição.** *Para grafos F e G, o número de subgrafos de G isomorfos a F é denotado por $s(F, G)$.*

**Lema de Kelly.** *Para quaisquer grafos F e G tais que $v(F) < v(G)$, $s(F, G)$ é reconstrutível.*

W.L. Kocay, em 1981, descobriu uma técnica elementar e extremamente poderosa que nos permite, até certo ponto, contornar a limitação imposta pelo lema de Kelly no número de vértices do subgrafo procurado.

**Definição.** *Seja $G$ um grafo qualquer e $\mathcal{F} := (F_1, F_2, ..., F_m)$ uma sequência de grafos (não necessariamente distintos). Uma* **cobertura** *de $G$ por $\mathcal{F}$ é uma sequência $(G_1, G_2, ..., G_m)$ de subgrafos de $G$ tais que $G_i \cong F_i$, $1 \leq i \leq m$, e $\cup G_i = G$. O número de coberturas de $\mathcal{F}$ por $G$ é denotado por $c(\mathcal{F}, G)$.*

**Lema de Kocay.** *Para todo grafo $G$ e toda sequência $\mathcal{F} := (F_1, F_2, \ldots, F_m)$ de grafos tais que $v(F_i) < v(G), 1 \leq i \leq m$, o parâmetro*

$$\Sigma_X \, c(\mathcal{F}, X) s(X, G)$$

*é reconstrutível, onde a soma estende sobre toda classe de isomorfismo X de grafo tal que $v(X) = v(G)$.*

Utilizando um caso especial do Lema de Kocay, Tutte conseguiu diminuir o número de classes X no somatório do Lema de Kocay.

**Lema de Kocay Estendido.** *O Lema de Kocay permanece válido quando a soma é tomada apenas sobre a classe de grafos conexos.*

## 3 Demonstração de um Resultado Clássico

Através de sucessivas aplicações do lema de Kelly, encontramos uma nova demonstração da validade da conjectura da reconstrução para grafos desconexos.

**Definição.** *Denota-se por $\alpha(G)$ o número de componentes de um grafo $G$.*

Inicialmente, demonstramos que o número de componentes conexos é uma propriedade invariante entre as reconstruções de um dado grafo.

**Lema 1.** *Se $F$ é uma reconstrução de $G$, então $\alpha(F) = \alpha(G)$, isto é, a função $\alpha$ é reconstrutível.*

Demonstramos a seguir que uma reconstrução $F$ de um grafo desconexo $G$ possui os mesmos componentes conexos que $G$.

**Definição.** *Denotaremos por $m(C, G)$ o número de componentes conexos de G isomorfos a C.*

**Lema 2.** *Se $F$ é uma reconstrução de um grafo desconexo $G$, então $m(C, G) = m(C, F)$ para todo grafo conexo C.*

Através desses dois resultados, demonstramos nosso resultado principal.

**Teorema 1.** *Grafos desconexos são reconstrutíveis.*

*Demonstração.* Pelo Lema 1, sabemos que se F é reconstrução de um grafo desconexo G, então F é desconexo. Através do Lema 2, segue que F e G possuem os mesmos componentes. Portanto, $G \cong F$. □

## 4 Uma Nova Abordagem para o Problema

Interpretando-se o lema de Kocay como uma equação válida para toda reconstrução de um grafo $G$, pode-se obter resultados muito interessantes. Aplicando-se o lema diversas vezes e para diferentes sequências, é possível obter um sistema de equações que daremos o nome de *sistema de equações de Kocay*.

Não encontramos na literatura qualquer desenvolvimento da teoria nesse sentido. Os próximos resultados são originais e foram obtidos durante os últimos meses de pesquisa.

**Teorema 2.** *Se um sistema de equações de Kocay de ordem $n$ possui solução única, então o grafo G que dá origem ao baralho do sistema é reconstrutível.*

**Teorema 3.** *Se um sistema de equações de Kocay de ordem $n$ possui solução única, então todos os grafos conexos de $n$ vértices são reconstrutíveis.*

**Corolário.** *Se um sistema de equações de Kocay de ordem n possui solução única, então todos os grafos de n vértices são reconstrutíveis.*

O problema da reconstrução fica, dessa forma, reduzido a um problema algébrico e combinatório: encontrar sequências especiais e demonstrar que o sistema de Kocay obtido possui solução única.

## 5 Conclusão

Assim como diversos outros pesquisadores que estudaram a conjectura da reconstrução de grafos, exibimos uma nova demonstração da reconstrução da classe de grafos desconexos. Além disso, os novos resultados que apresentamos fornecem uma abordagem completamente diferente da tradicional para se resolver a conjectura, e a idéia parece muito promissora.

UNICAMP

FAPESP