RECONSTRUÇÃO DE SINAIS A PARTIR DA TRANSFORMADA DE FOURIER INCOMPLETA

Jonas Oliveira Rodrigues
E-mail: jxonas@gmail.com
Bolsista

Lúcio Tunes dos Santos
E-mail: lucio@ime.unicamp.br
Orientador

DMA – IMECC – UNICAMP **CNPq**

Palavras-chave: Teoria da Informação – Sinais – Fourier

Em muitas aplicações de interesse prático, frequentemente é necessário reconstruir um objeto (um sinal discreto, uma imagem discreta, etc) a partir de uma amostra incompleta dos seus coeficientes de Fourier. No caso discreto unidimensional, podemos colocar o problema da seguinte forma.

Seja $\widehat{f}$ a *Transformada de Fourier* de um sinal f amostrado discretamente $f|_{\Gamma} = \{f_j \mid j \in \Gamma\}$ onde $\Gamma = \{0, 1, \ldots, N-1\}$. O problema é recuperar as amostras f_j a partir de uma amostra incompleta das transformadas $\widehat{f}|_{\Omega} = \{\widehat{f}_k \mid k \in \Omega\}$, com $\Omega \subset \Gamma$.

A extensão para o caso bidimensional, ou mesmo para dimensões maiores, é imediata. Um exemplo é o problema clássico de *tomografia médica*: reconstruir uma imagem bidimensional $f(t_1, t_2)$ em uma malha retangular a partir de amostras da *Transformada de Fourier* $\widehat{f}(w_1, w_2)$ em uma malha estrelar (linhas radiais com relativamente poucos ângulos de rotação).

Mínima energia

Uma possível abordagem é supor que as amostras faltantes dos coeficientes de Fourier são nulas e aplicar a *Transformada Inversa de Fourier*. Dessa forma, encontramos a solução de *mínima energia*, isto é, encontramos g que resolve o problema de otimização

$$\begin{aligned}&\text{Minimizar } \|\widehat{g}\|_1 \equiv \sum_{k=0}^{N-1} |\widehat{g}_k|\\ &\text{Sujeito a } \ \widehat{g}_k = \widehat{f}_k, \quad k \in \Omega.\end{aligned}$$

Como estamos omitindo conteúdo de frequências, tal solução nada mais é que uma versão suavizada do sinal original f. Na prática, esse método não apresenta bons resultados, além de ter severas restrições de aplicabilidade, muito bem estabelecias pelo *Teorema de Shannon*.

Interpolação dos coeficientes

Outra alternativa seria interpolar $\widehat{f}|_{\Omega}$. Mas isso não parece uma boa idéia, pois estimar os coeficientes de Fourier a partir das amostras é muito delicado, devido à natureza altamente oscilatória da Transformada.

Otimização convexa

Essa solução é apresentada por Càndes & Tao, e surpreende pelo seu poder e simplicidade. Definimos $S_h = \{j \in \Gamma | h_j \neq 0\}$ e definimos $\#A$ como sendo o número de elementos do conjunto A.

Teorema 1 *Se N é primo e se $\#S_f \leq \#\Omega/2$ então f pode ser reconstruído unicamente a partir de $\widehat{f}|_{\Omega}$. Reciprocamente, se $\#\Omega < N$ então existem vetores distintos f, g tais que $\#S_f, \ \#S_g \leq \#\Omega/2 + 1$* e $\widehat{f}|_{\Omega} = \widehat{g}|_{\Omega}$.

Em princípio, podemos reconstruir f exatamente resolvendo o problema de otimização combinatorial,

$$\begin{aligned}&\text{Minimizar } \|g\|_0 \equiv \#S_g\\ &\text{Sujeito a } \ \widehat{g}_k = \widehat{f}_k, \quad k \in \Omega.\end{aligned} \tag{1}$$

Entretanto, computacionalmente seria muito mais interessante e eficiente se pudéssemos reconstruir f resolvendo o problema convexo,

$$\begin{aligned}&\text{Minimizar } \|g\|_1 \equiv \sum_{j=0}^{N-1} |g_j|\\ &\text{Sujeito a } \ \widehat{g}_k = \widehat{f}_k, \quad k \in \Omega,\end{aligned} \tag{2}$$

que pode ser reduzido ao problema de programação linear,

$$\begin{aligned}&\text{Minimizar } \sum_{j=0}^{N-1} (x_j + y_j)\\ &\text{Sujeito a } \ W_k(x-y) = \widehat{f}_k, k \in \Omega\\ &\qquad\qquad x \geq 0, y \geq 0,\end{aligned} \tag{3}$$

onde $g_j = x_j - y_j$, $|g_j| = x_j + y_j$ e W_k é a k-ésima linha da matriz W que representa a *Transformada Discreta de Fourier*. A pergunta é se ainda temos uma qualidade na reconstrução de f mesmo resolvendo o problema (3). A resposta é afirmativa em alguns casos:

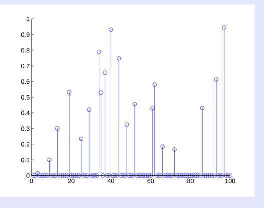
Teorema 2 *Para um dado parâmetro de precisão M, se $\#S_f \leq C_M (\log N)^{-1} \#\Omega$, então com probabilidade de no mínimo $1 - O(N^{-M})$ o minimizador do problema (2) é único e igual a f.*

Parece natural supor que, em geral, existam infinitos sinais com os mesmos coeficientes de Fourier e que o problema, portanto, não tenha solução única. O surpreendente é que para uma grande classe de sinais a reconstrução é exata.

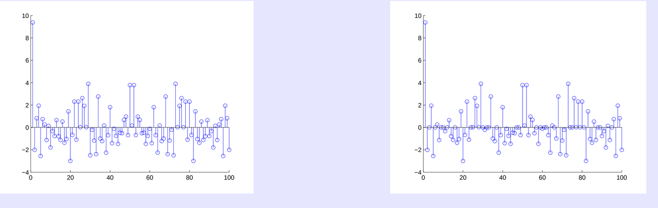
Testes Computacionais

f é um sinal discreto aleatório com $N = 100$, $S_f = 20$ e $\#\Omega = 75$. Ou seja, faltam 25 amostras em $\widehat{f}|_{\Omega}$. Observe que, nesse teste, a recontrução foi exata!

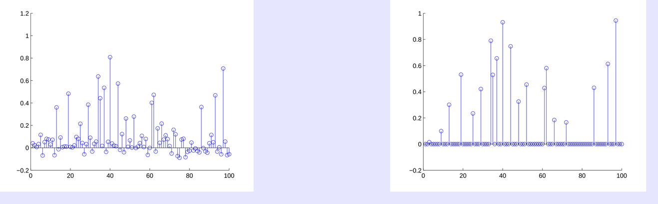
Sinal original f



Parte real de f e $\hat{f}$



Solução de Mínima Energia e pelo método estudado



Referência

E. Càndes & T. Tao, ***Robust Uncertainty Principles: Exact Signal Reconstruction from Highly Incomplete Frequency Information***, IEEE Transactions on Information Theory, 52, 489-509, 2006.