



SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CALOR PELO OPERADOR DE LAPLACE 2D ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM ÊNFASE NO ACOPLAMENTO DE SUBDOMÍNIOS ATRAVÉS DE TÉCNICAS DIRETAS E ITERATIVAS

Lucas de Castro Vieira (Bolsista PIBIC/CNPq) – lucas.sky05@gmail.com

Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto (Orientador) – euclides@fem.unicamp.br

Depto. de Mecânica Computacional – DMC, FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA - FEM - UNICAMP

Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica – PIBIC/CNPq

Palavras-Chave: Método dos Elementos de Contorno – Acoplamento Iterativo de Subdomínios

Introdução

A resolução de problemas de calor através do método dos elementos de contorno consiste em encontrar valores em qualquer ponto interno de um domínio, dado a discretização do seu contorno. A preocupação principal é, dividir grandes domínios em subdomínios com matrizes menores do MEC e introduzir um método novo de acoplamento destes subdomínios, que podem ser resolvidos separadamente facilitando o trabalho computacional.

Metodologia

Estudo do programa POCOMBE (BREBBIA, 1989) na linguagem Fortran. Do Método dos Elementos de Contorno temos: $\frac{1}{2} u(x_c) + \int_{\Gamma} u \cdot q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* \cdot q d\Gamma$ Solução Fundamental $\rightarrow u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$

A partir de $\vec{H}^j = \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma$ e de $\vec{H} \cdot \vec{u} = \vec{G} \cdot \vec{q}$ monta-se $AX=F$ e assim, para o acoplamento iterativo temos chute inicial de:

$$q_1^4 = q_2^4 = q_1^5 = q_2^5 = 0$$

$$G^j = \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \begin{bmatrix} -G_1^{11} & -G_1^{12} & H_1^{13} & H_1^{14} & H_1^{15} & H_1^{16} \\ -G_1^{21} & -G_1^{22} & H_1^{23} & H_1^{24} & H_1^{25} & H_1^{26} \\ -G_1^{31} & -G_1^{32} & H_1^{33} & H_1^{34} & H_1^{35} & H_1^{36} \\ -G_1^{41} & -G_1^{42} & H_1^{43} & H_1^{44} & H_1^{45} & H_1^{46} \\ -G_1^{51} & -G_1^{52} & H_1^{53} & H_1^{54} & H_1^{55} & H_1^{56} \\ -G_1^{61} & -G_1^{62} & H_1^{63} & H_1^{64} & H_1^{65} & H_1^{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1^1 \\ q_1^2 \\ u_1^3 \\ u_1^4 \\ u_1^5 \\ u_1^6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -H_1^{11} & -H_1^{12} & G_1^{13} & G_1^{14} & G_1^{15} & G_1^{16} \\ -H_1^{21} & -H_1^{22} & G_1^{23} & G_1^{24} & G_1^{25} & G_1^{26} \\ -H_1^{31} & -H_1^{32} & G_1^{33} & G_1^{34} & G_1^{35} & G_1^{36} \\ -H_1^{41} & -H_1^{42} & G_1^{43} & G_1^{44} & G_1^{45} & G_1^{46} \\ -H_1^{51} & -H_1^{52} & G_1^{53} & G_1^{54} & G_1^{55} & G_1^{56} \\ -H_1^{61} & -H_1^{62} & G_1^{63} & G_1^{64} & G_1^{65} & G_1^{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \\ q_1^3 \\ q_1^4 \\ q_1^5 \\ q_1^6 \end{pmatrix}$$

De forma análoga ocorre para o domínio 2. Assim, encontraremos as temperaturas resolvendo o sistema e daí se faz o processo iterativo..

Se (a) ou (b) não for verdade faz-se (c) e (d) e recalcula o sistema para u conhecido. Encontrando {q} verificamos se (e) e (f) são verdade. Caso não faz-se (g) e repete-se o processo até convergir como mostram os gráficos das figuras 4, 7 e 8.

$$(a) \Rightarrow |u_1^4 - u_2^4| \leq tol$$

$$(b) \Rightarrow |u_1^5 - u_2^5| \leq tol$$

$$(c) \Rightarrow u_1^5 = u_2^5 = \frac{(u_1^5 + u_2^5)}{2}$$

$$(d) \Rightarrow u_1^4 = u_2^4 = \frac{(u_1^4 + u_2^4)}{2}$$

$$(e) \Rightarrow q_1^5 + q_2^1 \leq tol$$

$$(f) \Rightarrow q_1^4 + q_2^2 \leq tol$$

$$(g) \Rightarrow \begin{cases} q_1^4 = \frac{(q_1^4 - q_2^2)}{2} \\ q_2^2 = -q_1^4 \\ q_1^5 = \frac{(q_1^5 - q_2^1)}{2} \\ q_2^1 = -q_1^5 \end{cases}$$

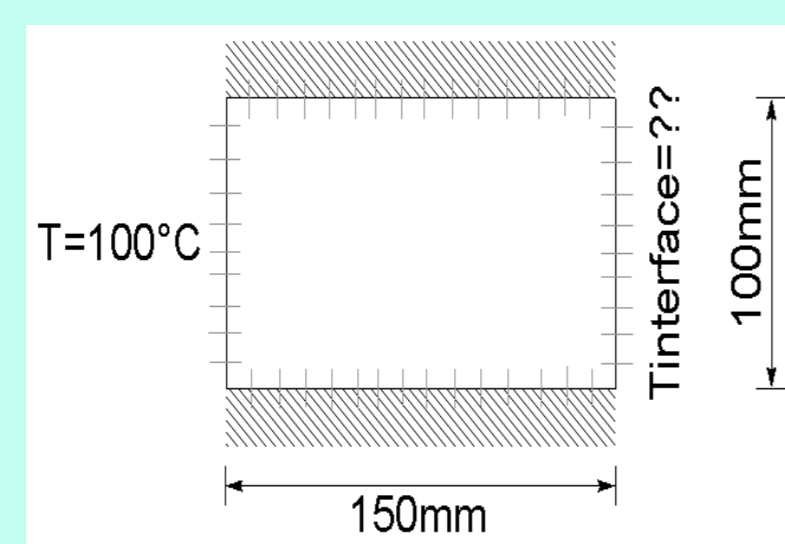


Figura 5 – Subdomínio 1 (50 elementos)

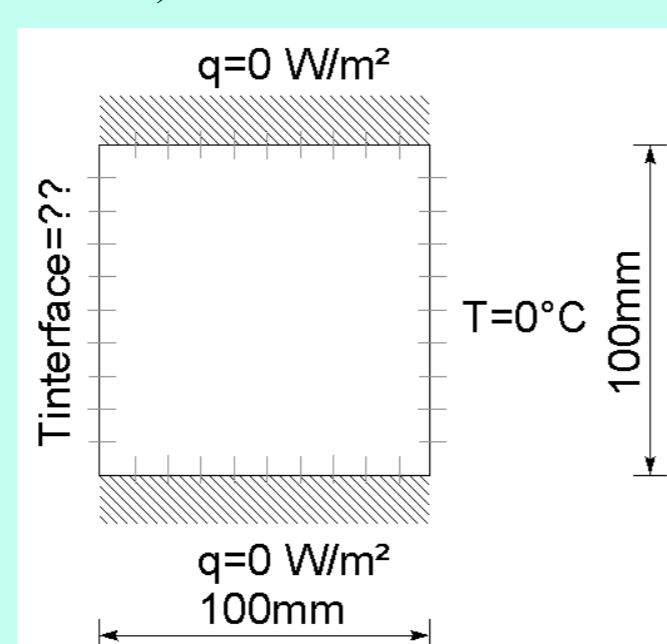


Figura 6 – Subdomínio 2 (40 elementos)

Analogamente, foi feito o mesmo processo iterativo para o domínio de 70 elementos divididos como mostra as figuras 5 e 6.

Resultados e Discussão

As figuras 4, 7 e 8 mostram gráficos de convergência destes processos iterativos

Nas figuras 7 e 8 percebemos que necessitou-se mais iterações para convergir os elementos correspondentes tanto para fluxo quanto para temperatura na interface em relação ao domínio com oito elementos, pois o domínio possui muito mais elementos e seus subdomínios possuem 10 nós na interface.

Conclusões

Pelo tempo de pesquisa reduzido, o objetivo de entender o MEC e aplicá-lo foi alcançado. Além disso, foi possível perceber que a técnica de acoplamento iterativo é bastante satisfatória. É possível dar continuidade ao projeto para que se possa automatizar o processo iterativo para qualquer domínio dividido em subdomínios sendo possível o próprio programa ler as coordenadas das interfaces e acoplá-las iterativamente sem a necessidade de explicitar quantos nós existe na interface e quais são eles.

Referência Bibliográfica: BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. (1989). Boundary Elements an Introductory Course. London: Computational mechanics publications

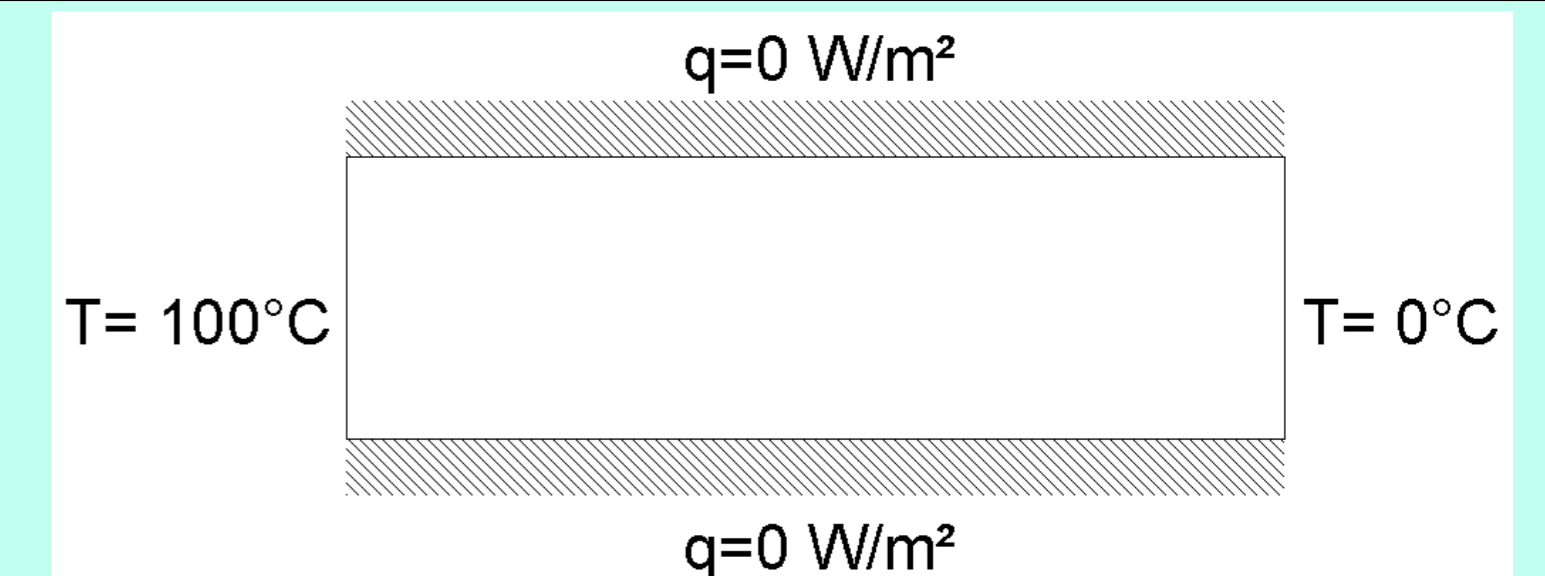


Figura 1 - Problema de condução de calor bidimensional com fluxo de calor unidirecional.

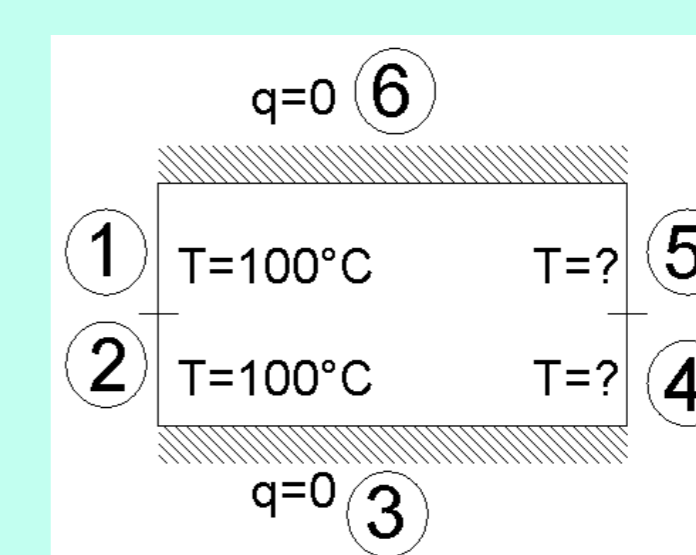


Figura 2: Subdomínio 1 com 2 nós na interface e temperatura desconhecida.

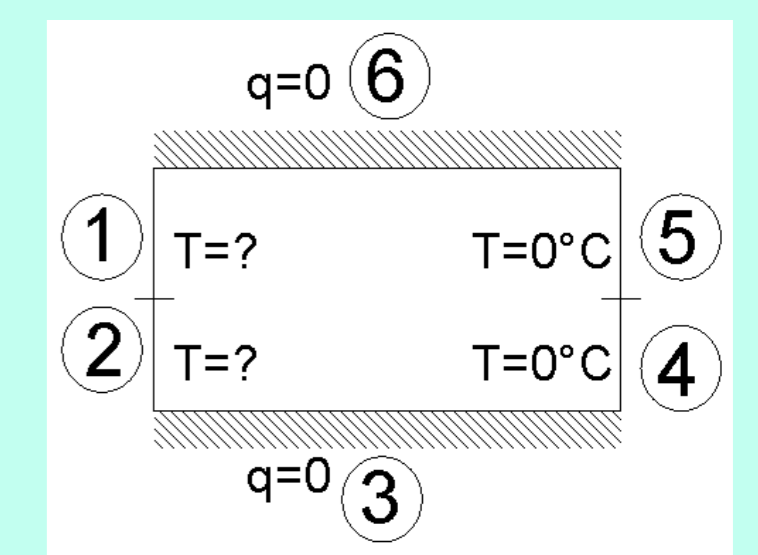


Figura 3: Subdomínio 2 com 2 nós na interface e temperatura desconhecida.

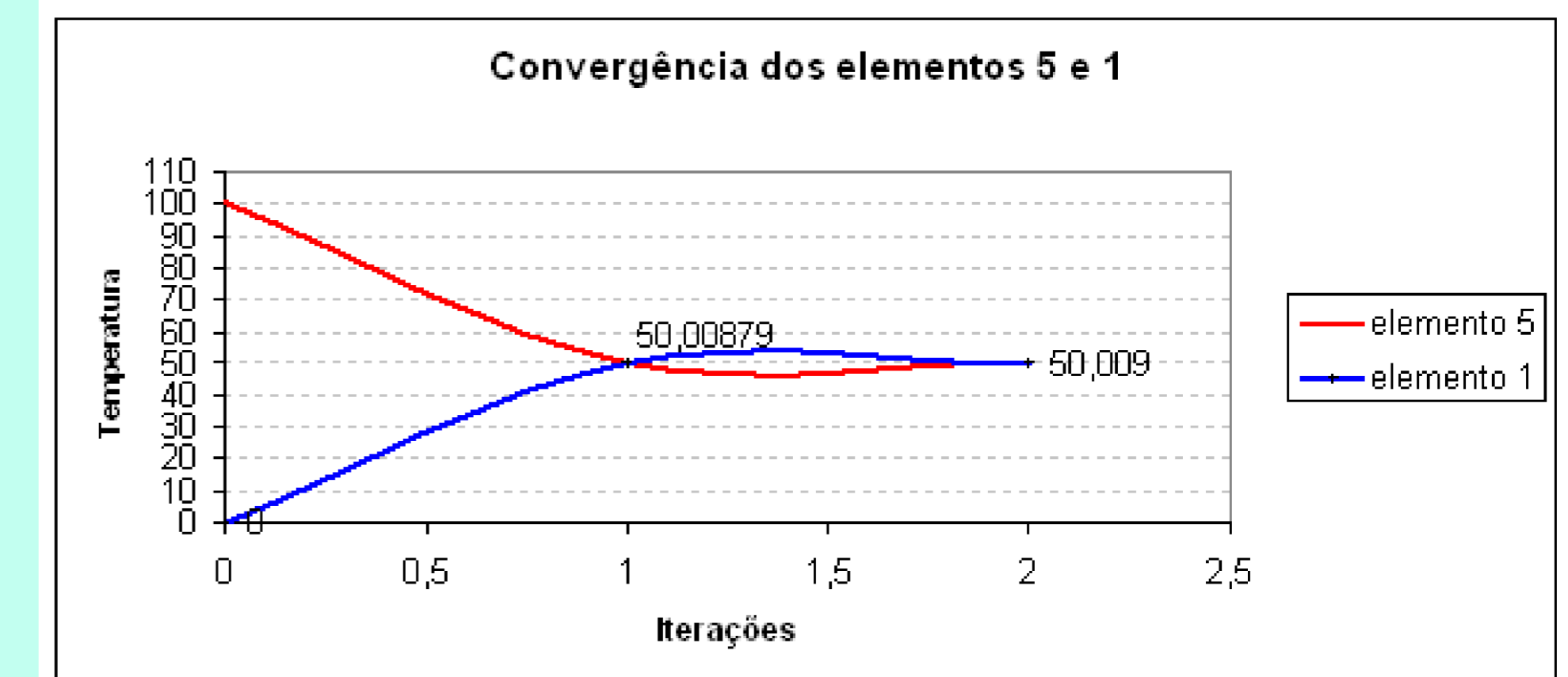
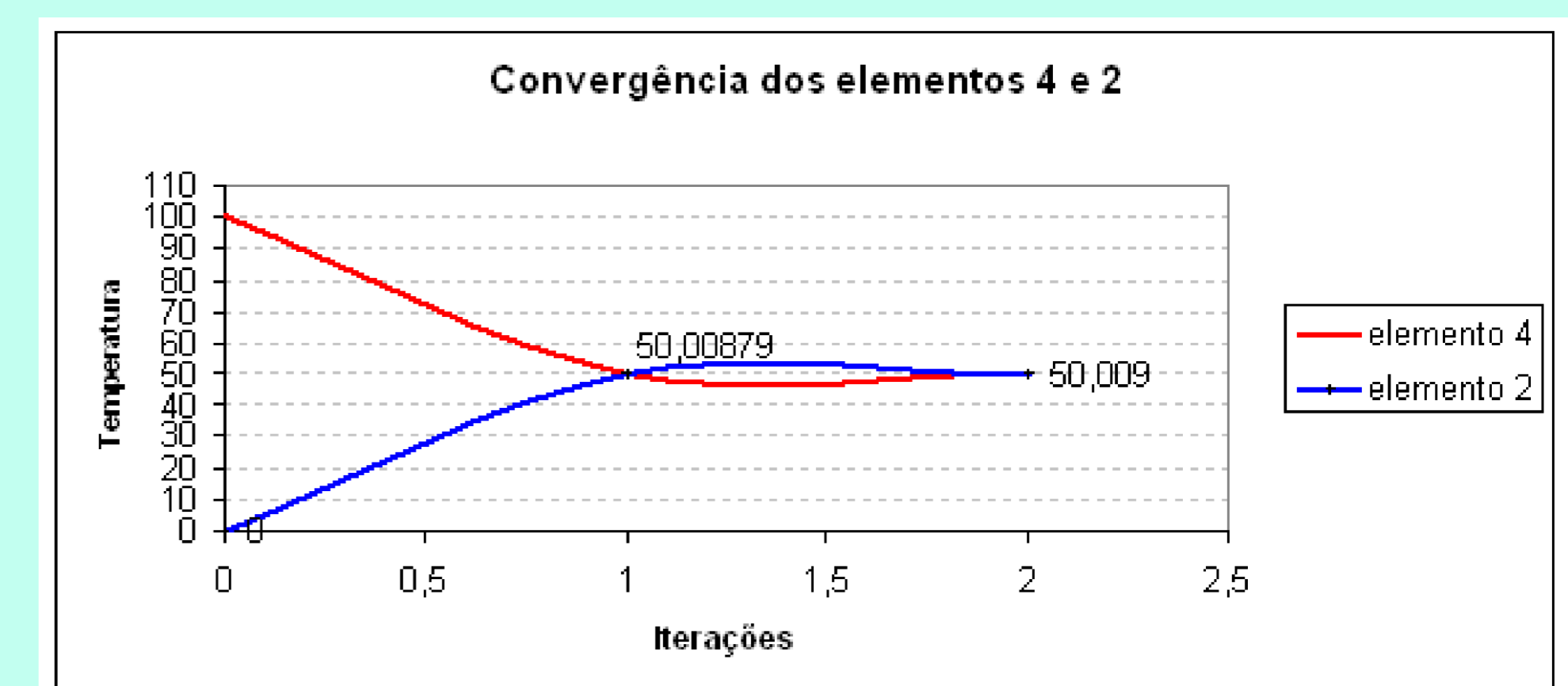


Figura 4 –Gráfico Temperatura x Número de Iterações. a) Elemento 4 do domínio 1 e elemento 2 do domínio 2. b) Elemento 5 do domínio 1 e elemento 1 do domínio 2.

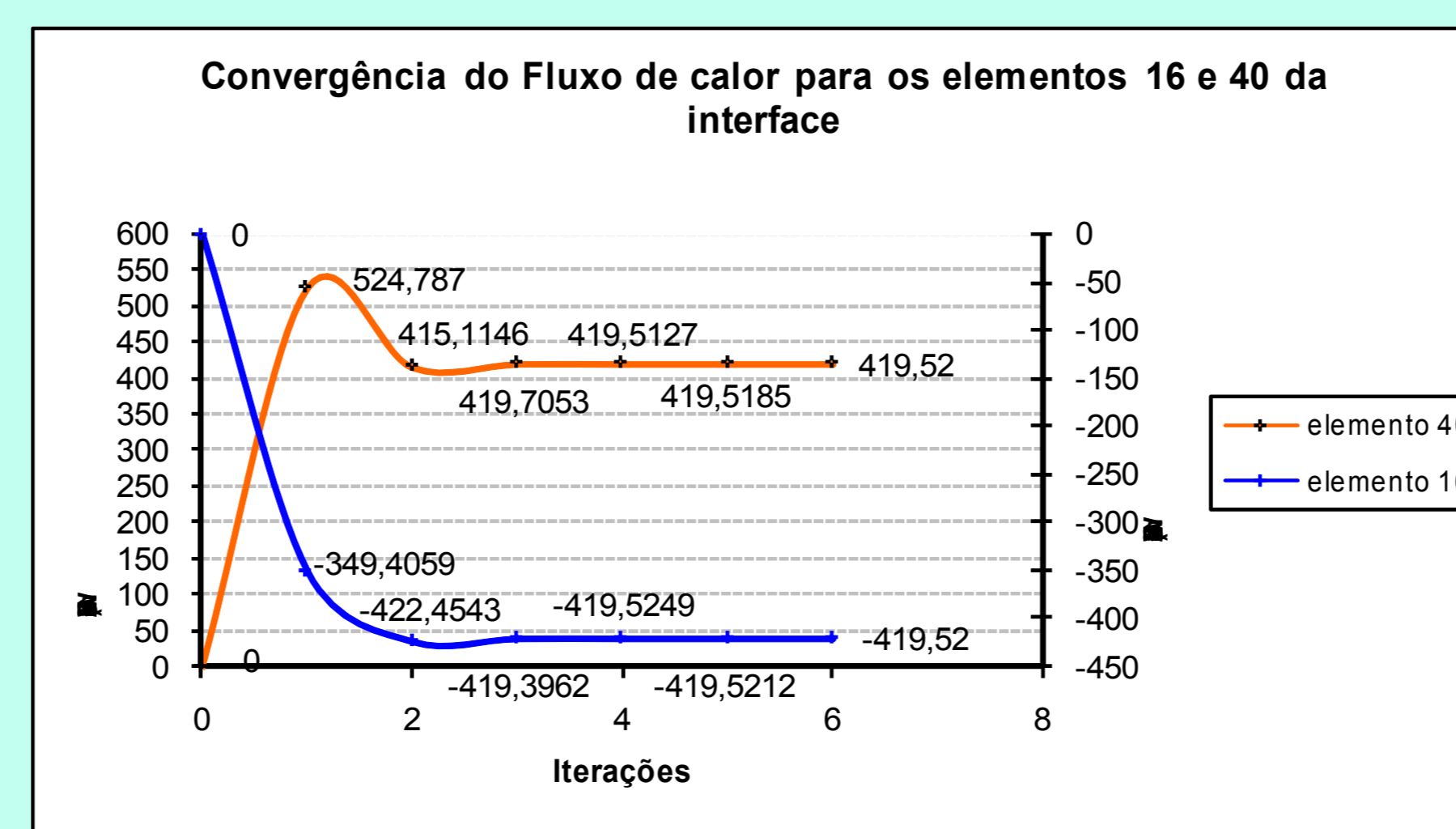


Figura 7 –Gráfico Fluxo de Calor x Número de Iterações dos subdomínios das fig.5 e fig.6 para os elementos correspondentes 16 do domínio 1 e 40 do domínio 2.

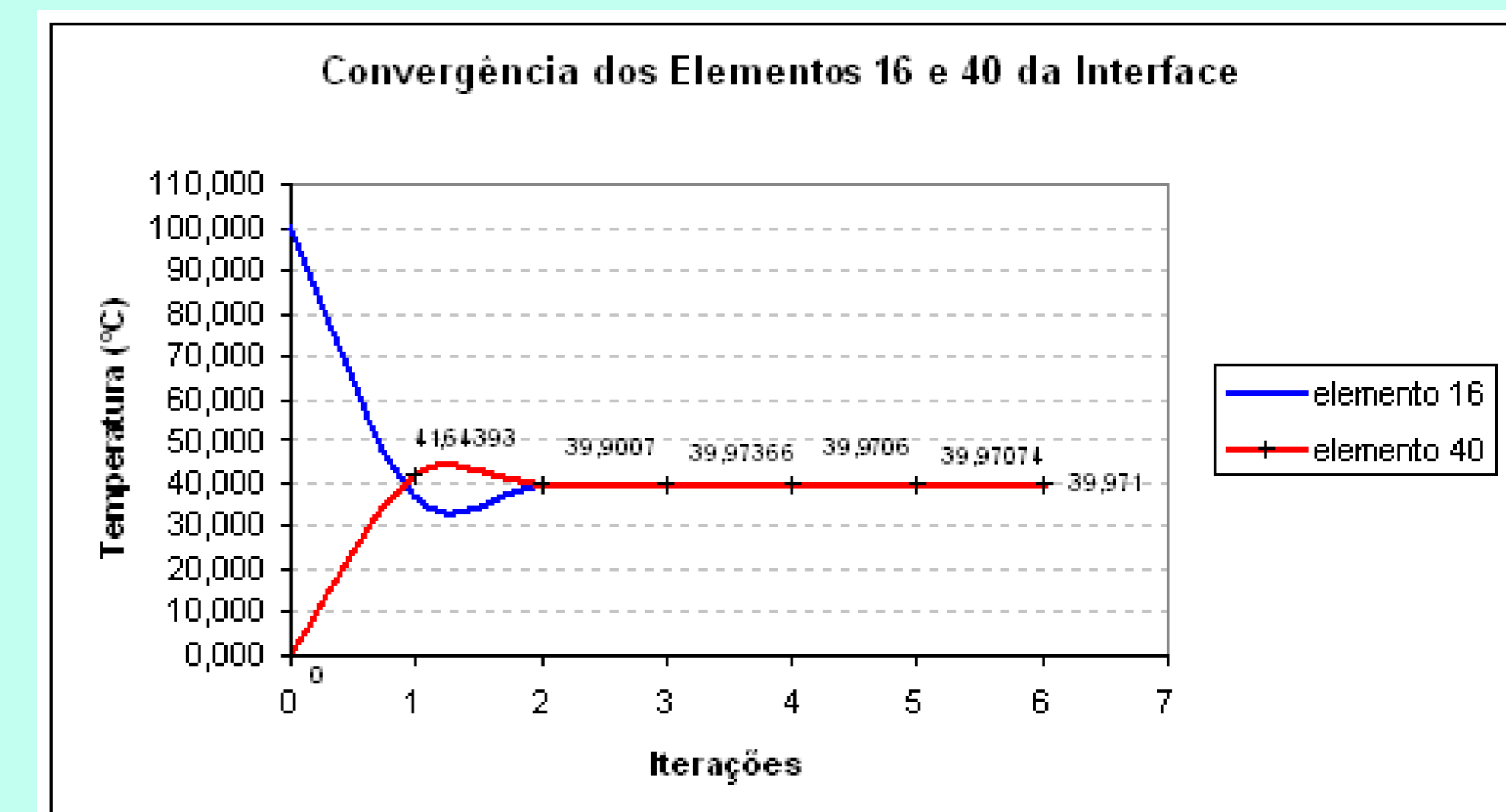


Figura 8 –Gráfico Temperatura x Número de Iterações dos subdomínios das fig.5 e fig.6 para os elementos correspondentes 16 do domínio 1 e 40 do domínio 2.