Bases em espaço de Banach: Hamel e Schauder

MATHEUS BATAGINI BRITO[1] & DANIELA MARIZ SILVA VIEIRA[2]

[1] matheus.bb@gmail.com e [2]danim@ime.unicamp.br

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, Brasil.

UNICAMP

IMECC

FAPESP

Agencia Financiadora: Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo
Palavras-Chave: Espaço de Banach - Base de Hamel - Base de Schauder

1 Introdução

Quando falamos em espaço vetorial, é comum pensarmos em sua base. Para o espaço de dimensão finita $\mathbb{R}^{\ltimes}$, é claro que o conjunto dos n vetores canônicos linearmente independentes formam uma base (chamada base de Hamel) deste espaço vetorial. Porém, para certos espaços de dimensão infinita (espaços de seqüências, por exemplo), o correspondente conjunto de infinitos vetores canônicos não é uma base de Hamel, pois existem vetores pertencente a este espaço que não podem ser escritos como uma combinação linear finita dos vetores canônicos. Mais do que isso, se um espaço de Banach tem dimensão infinita, então certamente a sua base é não enumerável. Por outro lado, os infinitos vetores canônicos podem formar uma Base de Schauder para muitos espaços de Banach. Neste projeto tratamos destas diferenças e analisamos diversos exemplos em espaços conhecidos.

2 Metodologia

Foram realizados seminários sobre tópicos da bibliografia previamente selecionados pela orientadora

3 Resultados e Discussões

3.1 Dimensão Finita

Quando falamos em espaços vetoriais de dimensão finita é comum pensarmos em sua base (ou base de Hamel) como sendo a canônica:

1 $\mathbb{R}^2$:

Base canônica: $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$

2 $\mathbb{R}^3$:

Base canônica: $\alpha = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

3 $\mathbb{R}^n$:

Base canônica: $\alpha = \{(\underbrace{1,0,0,\dots,0}_{n}),(\underbrace{0,1,0,\dots,0}_{n}),\dots,(\underbrace{0,0,\dots,0,1}_{n})\}$

E ainda podemos considerar em $\mathbb{R}^n$ três normas equivalentes:

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

$\|x\|' = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$\|x\|'' = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$

3.2 Dimensão Infinita

1 s: Espaço das sequências

É espaço métrico e vetorial, e sua métrica é definida por: $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n - y_n|}$, porém esta métrica não provém de uma norma pois não satisfaz:
$d(x+a, y+a) = d(x,y)$ e
$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y), \ \forall x, y, a \in s$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

Os próximos exemplos serão espaços de sequências naturais que são normados:

2 ℓ^∞: Espaço das sequências limitadas

Este espaço é uma generalização do "$\mathbb{R}^\infty$" com a norma $\|\cdot\|''$, ou seja:

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

2 ℓ^1: Espaço das sequências somáveis

$\ell^1 = \{x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$ é uma generalização do "$\mathbb{R}^\infty$" com a norma $\|\cdot\|'$, ou seja:

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

3 ℓ^2: Espaço das sequências quadrado somáveis

$\ell^2 = \{x = (x_n); \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ é uma generalização do "$\mathbb{R}^\infty$" com a norma Euclidiana ($\|\cdot\|$), ou seja:

$$\|x\| = \Big(\sum_n |x_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

4 ℓ^p: Espaço das sequências p-somáveis

$\ell^p = \{x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ tem sua norma é definida por:

$$\|x\| = \Big(\sum_n |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

3.3 Bases de espaços vetorias de dimensão infinita

Quando falamos em base de um espaço vetorial de sequências $E = \ell^p$ para algum $1 \le p \le \infty$, é mais natural pensarmos na base canônica $\alpha = \{e_1, e_2, \ldots\}$, onde $e_i = (\delta_{ij})$ ou seja:

$e_1 = (1,0,0,\cdots)$
$e_2 = (0,1,0,\cdots)$
$\vdots$
$e_n = (0,0,\cdots,0,\underbrace{1}_{n},0,\cdots)$

Este conjunto de vetores é LI, mas não gera o espaço, pois conseguimos um vetor que não é uma combinação linear finita de elementos de α. No entanto, este conjunto é chamado base de Schauder para os espaços ℓ^1, ℓ^2 e ℓ^p, pois:

$$\forall\, x \in E,\ \|x - (x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n)\| \longrightarrow 0 \text{ para } n \longrightarrow \infty, \text{ ou seja, } x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$$

Entrentanto (e_n) não é base de Schauder para ℓ^∞ pois para $x = (1,1,\cdots)$ e $0 < \varepsilon < 1, \forall n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\|x - (x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n)\| = \|(1,1,\cdots) - (1,1,\cdots,1,0,0,\cdots)\| = \|(0,0,\cdots,0,1,1,\cdots)\| = 1 > \varepsilon$$

Poderiamos questionar a existência de uma base de Schauder que gere o espaço vetorial, mas tal base não existe se o espaço for Banach (Espaço normado completo) pois:

- Vamos supor que X é um espaço de Banach com uma base enumerável $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$;
- Se U é um conjunto aberto de X e $x \in U$, então $X = \cup_{n=1}^{\infty} n(-x+U)$ e portanto $X = [U]$;
- Para cada n tome $F_n = [x_1, \cdots, x_n]$. Então cada F_n é fechado;
- Então $X = \cup_n F_n$ e pela definição de categoria de Baire, temos que X é de primeira categoria e portanto não é completo.

Existem espaços concretos de dimensão infita com base de Hamel enumerável(e portanto Schauder) como o espaço $P([a,b])$(espaço dos polinômios), no entanto este espaço não é completo.

4 Conclusão

Pudemos observar que o conjunto de vetores canônicos é uma base de Hamel para espaços vetoriais de dimensão finita, porém sua generalização para espaços de dimensão infinita não forma uma base de Hamel. Entretanto para alguns espaços, essa generalização forma uma base de Schauder. Além disso, se o espaço for completo (Banach), então a base de Hamel é não enumerável e portanto não é uma base de Schauder. Isto exemplifica a grande diferença entre espaços de Banach de dimensão finita e infinita.

Referências

[1] Introductory funcional analysis with applications - KREYSZIG, ERWIN, New York, 1989

[2] An introduction to Banach space theory - MEGGINSON, ROBERT E, New York, 1998