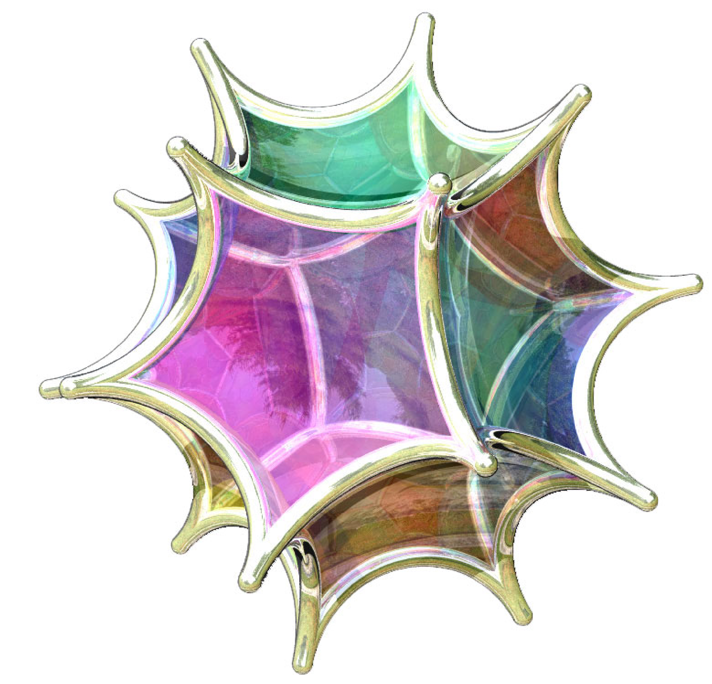
Teoria de Grupos e Simetrias em Física

Nayara Fonseca de Sá Prof. Dr. Alberto Saa

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

PIBIC/CNPQ

Simetrias – Grupos – Física



1 Introdução

O objetivo principal do projeto é encarar problemas físicos sob perspectivas algébricas. Utilizando teorias matemáticas bem estabelecidas, pode-se descrever um problema clássico com uma nova abordagem e encontrar estruturas anteriomente desconhecidas. O propósito é enfatizar os aspectos da teoria de grupos que são relevantes no tratamento de problemas físicos nos quais os conceitos de simetria e invariância são muito importantes.

2 Simetrias e Leis de Conservação

É um fato extraordinário que as leis da natureza possuam tantas simetrias. As mesmas são de importância fundamental no desenvolvimento da física moderna. Um exemplo tratado no projeto é a estreita conexão entre simetria e lei de conservação, o que é fornecido pelo teorema de Noether.

2.1 O Teorema de Noether

Apresentam-se abaixo duas versões do teorema. A original é conhecida como versão de Lagrange. A outra possui uma abordagem algébrica, sendo conhecida como versão de Hamilton.

Teorema 1 (Versão de Lagrange do Teorema de Noether). *Considere a invariância de L ante transformações infinitesimais de coordenadas. Também serão permitidas transformações infinitesimais nos campos*

$$x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu, \tag{1}$$

$$\gamma_\rho(x_\mu) \longrightarrow \gamma'_\rho(x'_\mu) = \gamma_\rho(x_\mu) + \delta\gamma_\rho(x_\mu). \tag{2}$$

Onde $\delta\gamma_\rho$ inclui tanto a variação nos campos quanto nas coordenadas. Quando deseja-se indicar mudança apenas nos campos usa-se $\gamma'_\rho(x_\mu) = \gamma_\rho(x_\mu) + \bar{\delta}\gamma_\rho(x_\mu)$. Assume-se também que

[1] O espaço-tempo é euclidiano.

[2] A densidade Lagrangiana possui a mesma forma funcional tanto em termos das quantidades transformadas quanto das quantidades originais, ou seja,

$$\mathcal{L}'(\gamma'_\rho(x'_\mu), \gamma'_{\rho,\nu}(x'_\mu), x'_\mu) = \mathcal{L}(\gamma'_\rho(x'_\mu), \gamma'_{\rho,\nu}(x'_\mu), x'_\mu). \tag{3}$$

[3] A magnitude da integral de ação é invariante ante a transformação, logo

$$\int_{\Gamma'} (dx'_\mu)\mathcal{L}', (\gamma'_\rho(x'_\mu), \gamma'_{\rho,\nu}(x'_\mu), x'_\mu) = \int_\Gamma (dx_\mu)\mathcal{L}(\gamma_\rho(x_\mu), \gamma_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu). \tag{4}$$

Então a transformação preserva a forma funcional da Lagrangiana e o valor numérico da integral de ação para todo o movimento, e portanto haverá grandezas conservadas.

Demonstração. Utilizando as equações (3) e (4) acima e trocando o índice de integração, obtém-se

$$\int_{\Gamma'} \mathcal{L}(\gamma'_\rho(x_\mu), \gamma'_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu)(dx_\mu) - \int_\Gamma \mathcal{L}(\gamma_\rho(x_\mu), \gamma_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu)(dx_\mu) = 0. \tag{5}$$

A diferença entre as variáveis com linha e sem linha é pequena, da mesma maneira que a diferença entre Γ' e Γ. Para o caso simples de uma função, considere abaixo a diferença entre as duas integrais

$$\int_{a+\delta a}^{b+\delta b} [f(x) + \delta f(x)]dx \; - \int_a^b f(x)dx = \tag{6}$$

$$= \int_a^b \delta f(x)dx \; + \int_b^{b+\delta b} [f(x) + \delta f(x)]dx \; - \int_a^{a+\delta a} [f(x) + \delta f(x)]dx. \tag{7}$$

Fazendo a aproximação

$$\int_b^{b+\delta b} f(x)dx \; - \int_a^{a+\delta a} f(x)dx = \delta b f(b) - \delta a f(a), \tag{8}$$

obtém-se de (6)

$$\int_{a+\delta a}^{b+\delta b} [f(x) + \delta f(x)]dx \; - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \delta f(x)dx \; + [f(x)\delta x]_a^b \tag{9}$$

$$= \int_a^b \left[\delta f(x) + \frac{d}{dx}(\delta x f(x))\right] dx. \tag{10}$$

O resultado é análogo para o caso funcional

$$\int_\Gamma (dx_\mu) \left\{ [\mathcal{L}(\gamma', x_\mu) - \mathcal{L}(\gamma, x_\mu)] + \frac{d}{dx_\nu}(\mathcal{L}(\gamma, x_\mu)\delta x_\nu) \right\} = 0. \tag{11}$$

Mas

$$\mathcal{L}(\gamma'_\rho(x_\mu), \gamma'_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu) - \mathcal{L}(\gamma_\rho(x_\mu), \gamma_{\rho,\nu}(x_\mu), x_\mu) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_\rho}\bar{\delta}\gamma_\rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_{\rho,\nu}}\bar{\delta}\gamma_{\rho,\nu}. \tag{12}$$

Utilizando as equações de movimento de Lagrange e o fato de que a variação $\bar{\delta}$ significa uma mudança de γ em relação a um ponto fixo no espaço (x_μ), tem-se que $\bar{\delta}$ pode comutar com o operador diferenciação espacial, logo

$$\mathcal{L}(\gamma', x_\mu) - \mathcal{L}(\gamma, x) = \frac{d}{dx_\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_{\rho,\nu}}\right)\bar{\delta}\gamma_\rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_{\rho,\nu}}\frac{d\bar{\delta}\gamma_\rho}{dx_\nu}. \tag{13}$$

E portanto

$$\int (dx_\mu)\frac{d}{dx_\nu}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_{\rho,\nu}}\bar{\delta}\gamma_\rho + \mathcal{L}\delta x_\nu\right\} = 0, \tag{14}$$

que apresenta a forma da equação das correntes conservadas . □

Teorema 2 (Versão de Hamilton do Teorema de Noether). *Se a álgebra de Lie g age canonicamente em uma variedade de Poisson P e admite um mapa de momento $\mathbf{J} : P \longrightarrow g^*$, e se $H \in \mathcal{F}(P)$ é invariante, ou seja, $\xi_P[H] = 0 \; \forall \; \xi \in g$, então $\mathbf{J}$ é uma constante do movimento para H, ou seja,*

$$\mathbf{J} \circ \varphi_t = \mathbf{J}, \tag{15}$$

em que φ_t é o fluxo de X_H.

Demonstração. A condição $\xi_P[H] = 0$ implica que o parêntese de Poisson de $J(\xi)$, a Hamiltoniana para ξ_P, e H é nulo : $\{J(\xi), H\} = 0$. Isso implica que para cada elemento ξ, $J(\xi)$ é uma quantidade conservada ao longo do fluxo de X_H. □