INTRODUÇÃO À TEORIA DE GAUGE ATRAVÉS DE MODELOS DA MECÂNCIA CLÁSSICA

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Antônio Mosna

Aluno: Rodrigo Pires dos Santos

IMECC, Universidade Estadual de Campinas

email: mosna@ime.unicamp.br, rdgpires@gmail.com

CNPq/PIBIC

Teorias de gauge - Fibrados e conexões - Fases geométricas

Introdução

As teorias de gauge têm sido fonte de grandes resultados na física com aplicações em mecânica clássica e teoria de campos, por exemplo. Na mecânica clássica, modelos com corpos deformáveis formam um vasto campo para aplicação da teoria de gauge. Para eleborarmos modelos em teoria de gauge, fazemos uso da teoria de fibrados principais e conexões.

Fibrados principais, conexões e holonomia

Fibrados principais são estruturas matemáticas que formalizam um espaço P que é localmente (ou globalmente) o produto cartesiano de um grupo de *Lie* G com uma variedade M (espaço base). Nos modelos estudados, como em [2], o grupo G está relacionado às simetrias e M está relacionado aos graus de liberdade internos do problema.

Uma conexão (potencial de gauge) é uma 1-forma ω definida sobre o espaço tangente a P que se anula em determinadas direções, as quais denominamos horizontais. Em geral, uma conexão tem origem física e às vezes pode ser vista como uma lei de conservação.

Dessa maneira, dada uma curva fechada $\gamma : [0,1] \to M$ (figura 1), podemos definir o levantamento horizontal de γ como sendo uma curva $\Gamma : [0,1] \to P$ tal que Γ' é vertical.

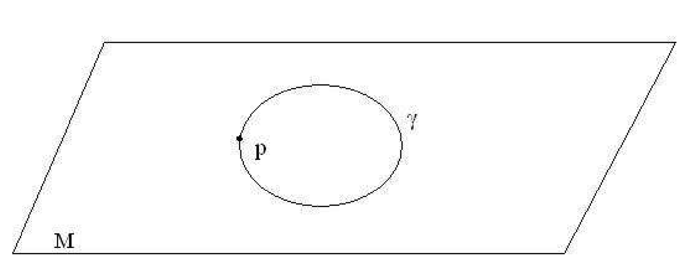

Figura 1: Curva fechada γ em M.

Uma ilustração de tal levantamento é mostrada na figura abaixo.

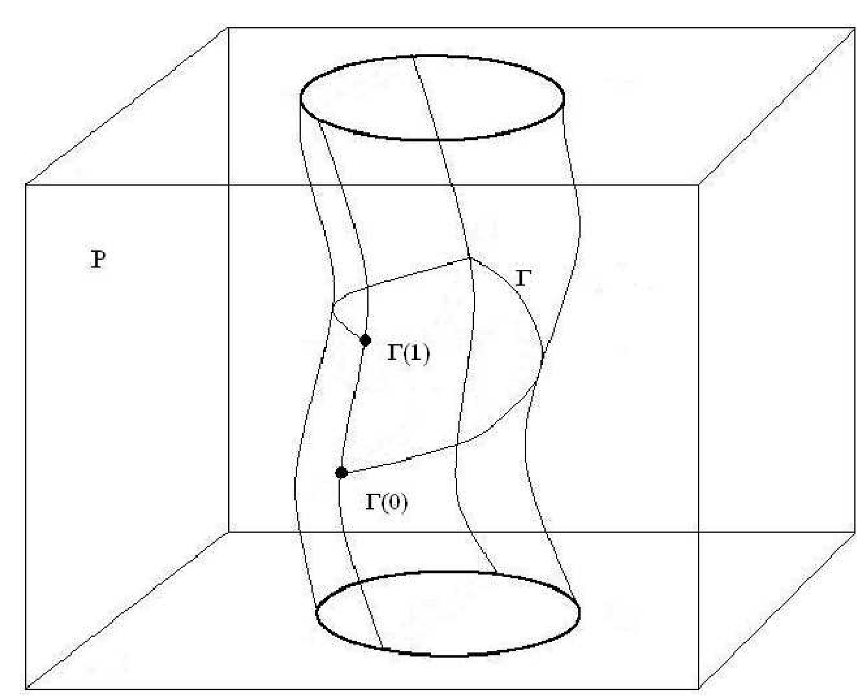

Figura 2: Levantamento horizontal Γ (não necessariamente fechado) de uma curva fechada γ.

A figura 2 nos dá um exemplo em que Γ não é uma curva fechada. Chamamos de holonomia o elemento de G que mede o "distanciamento" entre $\Gamma(0)$ e $\Gamma(1)$. Os detalhes da teoria de fibrados estão em [4] e [1].

Aplicação para o problema do carro [3]

Para estudar este modelo, precisamos de um espaço P com coordenadas $(\alpha, \beta, x, y, \varphi)$, como nas figuras 3 e 4. Nosso espaço base consiste de todos os possíveis formatos do carro (coordenadas (α, β), as quais o motorista pode controlar). O grupo estrutural (ou de simetria) será $E(2)$, que corresponde aos movimento rígidos do carro em R^2. Assim, temos uma estrutura de fibrado principal e podemos definir uma conexão (ou potencial de gauge) sobre ele de maneira bastante natural. Para isso, utilizamos a condição de rodar sem deslizar para o pneu do carro. Através do potencial, podemos fazer o levantamento horizontal de uma curva em M para o espaço total P.

Nosso problema consiste em estacionar o carro movendo o seu eixo perpendicularmente à direção anterior, ou seja, queremos fazer uma baliza. É fato que não podemos fazer esse movimento diretamente. No entanto, se fizermos um ciclo em M, podemos gerar o movimento resultante desejado em P. Isto corresponde a uma holonomia não trivial para esta conexão.

Conclusão

Neste projeto, estudamos um bom exemplo de aplicação do formalismo das teorias de gauge em mecânica clássica. O esquema utilizado foi o seguinte. Temos o espaço total de configurações P, o grupo de *Lie* $E(2)$ que age em P e um espaço base M. Dessa forma, temos uma estrutura de fibrado principal. A conexão neste caso tem uma origem física. Para sua construção, foi necessário estabelecer restrições ao movimento, que neste caso foi o fato da roda não deslizar na pista.

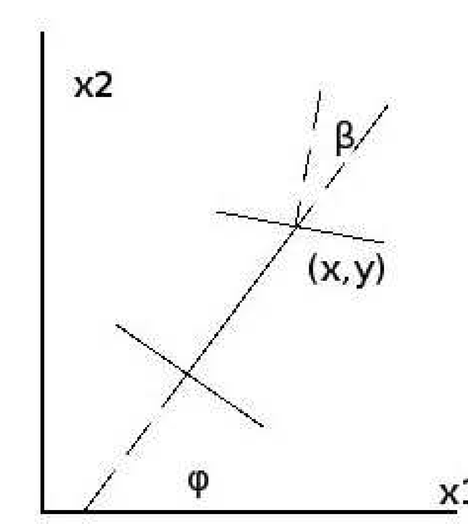

Figura 3: Coordenadas x, y, φ e β.

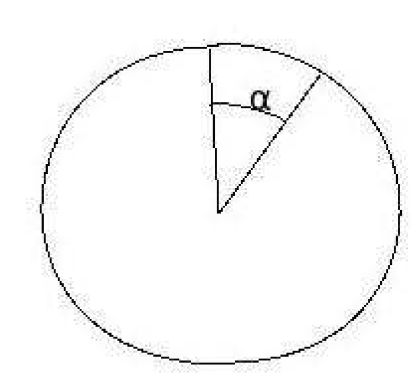

Figura 4: Coordenada α.

Referências

[1] D. Bleecker. *Gauge Theory and Variational Principles*. Addison-Wesley, 1981.

[2] R.G. Littlejohn e M. Reinsch. Gauge fields in the separation of rotations and internal motions in the n-body problem. *Rev. Mod. Phys*, 69:213–275, 1997.

[3] M. Fecko. Gauge-potencial approach of the kinematics of a moving car. *Il Nuovo Ciumento*, 111:1315–1332, 1996.

[4] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Taylor and Francis, 2003.