



# Células do Sistema Nervoso: Estudo Introdutório da Dinâmica de Transmissão de Sinais

TAMMY SALGADO DUARTE & HYUN MO YANG  
tammyduarte@gmail.com e hyunyang@ime.unicamp.br

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasil.  
CNPQ

Modelo matemático - Célula neuronal - Potencial de ação.



## 1 Resumo

A complexidade do sistema nervoso é um assunto que intriga muitos pesquisadores. Ao longo dos anos foram elaborados modelos que são capazes de descrever o comportamento que determina seu funcionamento. Neste trabalho foram estudados dois dos principais modelos matemáticos a respeito desta tema, o de Hodgkin Huxley que, a partir de experimentos realizados elaboraram um modelo que descreve esta dinâmica de forma satisfatória; e o modelo de Fitzhugh Nagumo, que apresenta uma simplificação do anteriormente descrito.

## 2 Introdução

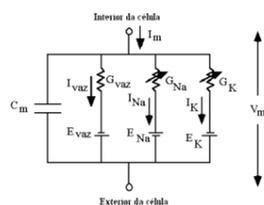
O cérebro é uma rede precisa onde mais de 100 bilhões de células neurais individuais, interligadas estruturalmente, produzem nossa percepção do mundo exterior, fixam nossa atenção e controlam a maquinaria da ação. O estudo dos circuitos neurais dos animais vertebrados é, provavelmente, o campo mais complexo da ciência, tanto pela complexidade intrínseca, quando pelo elevado número de neurônios que existem no sistema nervoso dos animais de posição filogenética mais elevada da série animal. Para sua compreensão é preciso entender, primeramente, como as células neurais individuais do cérebro se comunicam. Para tal, uma onda de descarga elétrica, provocada por fatores químicos (fluxo de íons por canais voltagem-dependentes), percorre a membrana de uma célula, através do axônio, e transporta rapidamente informações entre e dentro dos tecidos por meio de potenciais de ação, que são variações muito rápidas do potencial de membrana. Estes sinais percorrem o sistema nervoso através da transmissão sináptica e respostas são obtidas como reação ao estímulo externo.

O primeiro trabalho dedicado a compreensão desta dinâmica de transmissão de sinais foi elaborado por Hodgkin e Huxley na primeira metade do século XX, através de um modelo onde foi proposta uma das mais notáveis e bem sucedidas descrições matemáticas, baseada em uma simplificação da circuitaria elétrica que descreve a dinâmica do potencial de ação, chegando a ganhar o prêmio Nobel de medicina em 1963.

Este trabalho foi o ponto inicial do surgimento de muitos outros estudos de modelagem que englobam a fisiologia celular. Uma simplificação para o modelo de Hodgkin Huxley, conhecida como modelo de Fitzhugh Nagumo, foi elaborada para a compreensão do comportamento qualitativo desta dinâmica.

## 3 Modelo de Hodgkin Huxley

A membrana de um neurônio pode ser descrita como um circuito elétrico que envolve três componentes: resistência, capacitor e corrente.



As correntes são dadas por canais de ativação do íon  $K^+$  ( $n$ ), canais de ativação do íon  $Na^+$  ( $m$ ) e canais de inativação do íon  $Na^+$  ( $h$ ).

O modelo pode ser resumido pelo conjunto de equações diferenciais:

$$C \frac{dV}{dt} = I(t) + \bar{g}_K n^4 (E_K - V) + \bar{g}_{Na} m^3 h (E_{Na} - V) + \bar{g}_{vaz} (E_{vaz} - V),$$

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n,$$

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m(V)(1 - m) - \beta_m(V)m,$$

$$\frac{dh}{dt} = \alpha_h(V)(1 - h) - \beta_h(V)h.$$

Estas equações descrevem a dinâmica do potencial de ação que ocorre em uma célula neural.

## 4 Simulações numéricas e interpretação

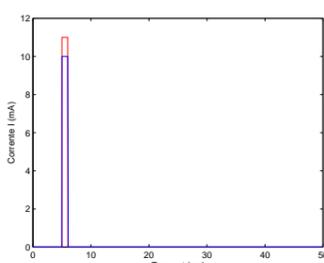


Fig.1. São utilizados dois valores diferentes de corrente em um mesmo instante.

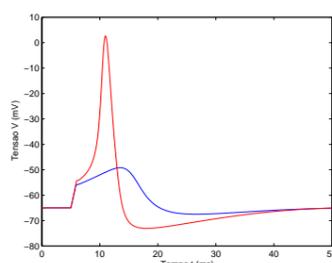


Fig.2. Observa-se que há um limiar que deve ser atingido para que ocorra o potencial de ação.

## 4 Simulações numéricas e interpretação

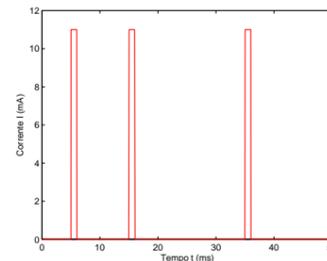


Fig.3. O mesmo valor de corrente é utilizado em três momentos diferentes.

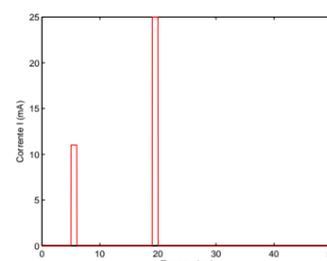


Fig.5. No segundo momento é utilizado um valor maior de corrente.

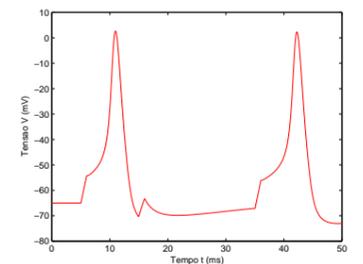


Fig.4. Nota-se que, quando a tensão se encontra abaixo do valor de repouso, não ocorre o potencial de ação para um mesmo valor de corrente.

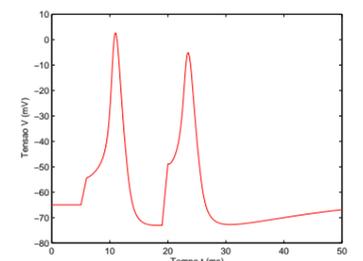


Fig.6. O potencial de ação ocorre no segundo momento.

## 5 Modelo de Fitzhugh Nagumo

De Hodgkin Huxley têm-se variáveis rápidas  $m$  e  $V$  e variáveis lentas  $n$  e  $h$ . Onde  $m \equiv m(V)$  e  $n + h \equiv 0.85$ . Reescrevendo a 1ª equação de Hodgkin Huxley:

$$C \frac{dV}{dt} = I(t) + \bar{g}_K n^4 (E_K - V) + \bar{g}_{Na} m^3 (V)(0,85 - n)(E_{Na} - V) + \bar{g}_L (E_L - V),$$

Observando que  $\frac{dV}{dt}$  tem seu gráfico aproximado de uma cúbica e que  $\frac{dn}{dt}$  tem seu gráfico aproximado de uma reta, as equações foram simplificadas para:

$$\varepsilon \frac{dv}{dt} = v - \frac{v^3}{3} - w + z(t),$$

$$\frac{dw}{dt} = v - bw + a.$$

A simplificação proposta mantém satisfatoriamente as principais características do modelo original de Hodgkin Huxley.

## 6 Conclusão

O trabalho elaborado por Hodgkin e Huxley para descrever a geração de um impulso nervoso em um axônio é o ponto inicial da modelagem em neurociência. O modelo, que foi elaborado a partir de experimentos, onde propuseram um circuito elétrico equivalente para modelar o fenômeno e utilizaram as leis da eletricidade para chegar a um sistema de equações diferenciais ordinárias, descreve bem as diferentes fases do potencial de ação e processa a propriedade do limiar para sua ocorrência. Fitzhugh e, separadamente, Nagumo revisaram-no considerando um modelo simplificado de duas equações diferenciais, que preservam as propriedades do original.

## 7 Referências

- [1] O Modelo de Hodgkin-Huxley - <http://vigo.ime.unicamp.br/fismat/2004-I-NC-aula7.pdf>;
- [2] A Fisiologia do Neurônio e os Modelos de Hodgkin-Huxley e Fitzhugh-Nagumo - Tese de mestrado de Peterson T. C. Barbosa, 04 de junho de 2007;
- [3] Fundamentos da neurociência e do comportamento - KANDEL, ERIC R.; SCHWARTZ, JAMES H.; JESSEL, THOMAS M., Rio de Janeiro, 1997.