TÓPICOS EM TEORIA DOS NÚMEROS

por Tomás Silveira Salles (orientando) e Ary Orozimbo Chiacchio (orientador)

IMECC | PIBIC - CNPq

Funções Aritméticas - Números Notáveis - Congruências
Teoria Analítica de Números

FUNÇÕES ARITMÉTICAS são aquelas definidas sobre $\mathbb{N}$. As mais importantes envolvem divisibilidade e decomposição em fatores primos. A função soma de f (Σ_f) é uma construção freqüente e o produto de Dirichlet ($\square$) uma ferramenta poderosa. O teorema ao lado relaciona esses objetos.

$$g = \Sigma_f \quad \underset{\text{Dirichlet}}{\overset{\text{Möbius}}{\substack{\Longrightarrow \\ \Longleftarrow}}} \quad f = g \square \mu$$

$$\left\{ \begin{array}{c} n = 2^{k-1}(2^k - 1) \\ 2^k - 1 \text{ é primo} \end{array} \right\} \underset{\text{Euler}}{\overset{\text{Euclides}}{\substack{\Longrightarrow \\ \Longleftarrow}}} \left\{ \begin{array}{c} n \text{ é perfeito} \\ \text{e par} \end{array} \right\}$$

NÚMEROS NOTÁVEIS são os elementos de subconjuntos de $\mathbb{N}$ definidos por funções aritméticas. Os perfeitos, por exemplo, são os que coincidem com a soma de seus divisores próprios. Essa área apresenta muitas questões em aberto, geralmente sobre a finitude de certos conjuntos de números notáveis ou a caracterização de seus elementos.

CONGRUÊNCIA módulo $m \in \mathbb{N}$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$ que identifica os números que geram o mesmo resto na divisão por m. Ao lado, uma generalização simples do Teorema de Wilson.

$$(n-1)! \overset{\text{Wilson}}{=} \begin{cases} 2 & (\text{mod } n) \text{ se } n = 4 \\ -1 & (\text{mod } n) \text{ se } n \text{ é primo} \\ 0 & (\text{mod } n) \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$\alpha_n = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha \text{ é uma FCS} \\ \text{periódica} \end{array} \right\} \overset{\text{Lagrange}}{\Longleftrightarrow} [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2$$

FRAÇÕES CONTÍNUAS (FC's) finitas são números dados como α_n ao lado, enquanto as infinitas são limites de seqüências como $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dizemos que uma FC é simples (FCS) se $a_1 \in \mathbb{Z}$ e $a_k \in \mathbb{N} \quad \forall k > 1$. As FCS's são muito úteis pois fornecem as melhores aproximações racionais com denominadores mínimos. Todo número real é uma FCS e tal representação é única em certo sentido.

TEORIA ANALÍTICA DE NÚMEROS é a vertente da teoria de números que usa ferramentas da análise. Uma das provas do Teorema dos Números Primos, por exemplo, usa a função complexa ζ de Riemann. Nesse teorema, $\pi(x)$ é a quantidade de números primos menores que ou iguais a x. A demonstração foi obtida por Hadamard e Poussin independentemente e quase simultaneamente, e o resultado permite uma aproximação do valor do k-ésimo primo dada ao lado. A "Hipótese de Riemann" (1859) diz que as raízes de ζ no semi-plano direito têm parte real 1/2, e ainda é um grande desafio da matemática.

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \text{ se } Re(z) > 1$$

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)} \qquad p_k \sim k \ln(k)$$

x	$\approx \frac{x}{\ln(x)}$	$\pi(x)$
10	4,3	4
10^3	144,8	168
10^5	8.686	9.592
10^7	620.420	664.579
10^9	48.254.942	50.847.534

Fontes: **[1]** Alencar Filho, Edgard de. "Funções Aritméticas/ Números Notáveis". 1988. Nobel.
[2] Apostol, Tom M. "Introduction to Analytic Number Theory". 1976. Springer-Verlag.