Introdução à Teoria dos Grupos

Julio Cesar Conegundes da Silva (Aluno)

Dessislava Hristova Kochloukova (Orientadora)

Apoio Financeiro: CNPq

2 de outubro de 2008

1 Introdução

A Teoria dos Grupos é uma das teorias matemáticas mais utilizadas dentro e fora da matemática. O seu surgimento, embebido nos trabalhos de Galois, tem origem em questões relacionadas a raízes de polinômios e grupos de permutações. Na geometria, os trabalhos de Klein sobre espaços topológicos e grupos fundamentais representaram um grande avanço nesta área. Em análise, os trabalhos de Lie relacionaram grupos a equações diferenciais. Segue daí, que é de grande interesse matemático saber como tais estruturas algébricas que chamamos de grupos se comportam.

O foco deste estudo sobre Teoria de Grupos incide sobre Teoria Combinatória de Grupos. A Teoria Combinatória de grupos consiste no estudo de grupos através de elementos geradores deste grupo e as relações entre esses elementos segundo a operação estabelecida em tal grupo.

2 Grupos Livres

Definição 1 (Grupo Livre)**.** *Sejam G um grupo e X um subconjunto de G. Dizemos que G é um grupo livre em X se para todo grupo H e função $f : X \to H$ existe um único homomorfismo $\varphi : G \to H$ tal que o diagrama abaixo é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & H \\ G \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

onde $i : X \to G$ é a função inclusão em G.

Definição 2. *Seja X um conjunto e suponhamos que haja uma bijeção $x \to x^{-1}$ entre X e um conjunto X^{-1} tal que $X \cap X^{-1} = \emptyset$. Definimos $F(X)$ como sendo o conjunto das seqüências finitas de elementos dos conjuntos X e X^{-1} tais que (x, x^{-1}) ou (x^{-1}, x) não são subseqüências para todo $x \in X$.*

Teorema 1. *O conjunto $F(X)$ é um grupo com a operação de concatenar seqüências (eliminando-se as subseqüencias do tipo (x, x^{-1}) ou (x^{-1}, x)). Além disso:*

- *$F(X)$ é o único grupo livre em X a menos de isomorfismo;*
- *$F(X) \simeq F(Y)$ se e somente se $|Y| = |X|$;*
- *(Teorema de Nielsen) Todo subgrupo de um grupo livre é também livre.*

Teorema 2. *Todo grupo é quociente de um grupo livre.*

Demonstração. Considere $F(G)$ e $R = \{(g_1, ..., g_n) \in F(G) \mid g_1 g_2 ... g_n = 1\}$. Então $G \simeq F(G)/\langle R\rangle^{F(G)}$.

$\square$

Definição 3 (Apresentação de Grupo)**.** *Dizemos que o grupo G tem apresentação $\langle X \mid R\rangle$ se $G \simeq F(X)/\langle R\rangle^{F(X)}$.*

Exemplos:

- $\mathbb{Z}_n = \langle 1 \mid 1^n\rangle$
- $D_{2n} = \langle a, b \mid a^n, b^2, (ab)^2\rangle$
- $S_n = \langle \sigma_1, ..., \sigma_{n-1} \mid \sigma_i^2, \sigma_i\sigma_j(\sigma_j\sigma_i)^{-1}$ para $j \neq i \pm 1$ e $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i(\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1})^{-1}\rangle$
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle x, y \mid xy(yx)^{-1}\rangle$
- $F(X) = \langle X \mid \emptyset\rangle$

- $1 = \langle x, y \mid xy^2(y^3x)^{-1}, yx^3(x^2y)^{-1} \rangle$

Teorema 3 (de von Dyck)**.** *Seja* H *um grupo,* $f : X \to H$ *uma função qualquer e* $G = \langle X \mid R \rangle$*. Então, se* $\varphi : F(X) \to H$ *é o homomorfismo induzido por* f *em* $F(X)$ *e* $R \subset ker\varphi$ *então existe um homomorfismo* $\psi : G \to H$ *tal que* $\psi|_X = f$*.*

3 Produto Livre

Definição 4 (Produto Livre)**.** *Seja* $\{G_\lambda\}$ *uma família de grupos,* P *um grupo e* $\{i_\lambda : G_\lambda \to P\}$ *uma família de homomorfismos. Dizemos que* $(P, \{i_\lambda\})$ *é o produto livre de* $\{G_\lambda\}$ *se para todo grupo* H *e homomorfismos* $\{j_\lambda : G_\lambda \to H\}$ *existe um único homomorfismo* $\varphi : P \to H$ *tal que o diagrama abaixo é co-*

mutativo para todo λ

$$\begin{tikzcd} G_\lambda \arrow[r, "j_\lambda"] \arrow[d, "i_\lambda"'] & H \\ P \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

É possível se demonstrar que para toda família $\{G_\lambda\}$ *existe um produto livre desta família e este produto livre é único a menos de isomorfismo. Denotando* $P = *_\lambda G_\lambda$.

Teorema 4 (Forma Normal de Produtos Livres)**.** *Seja* (G_λ) *uma família de grupos e* $(P, \{i_\lambda\})$ *seu produto livre. Então:*

- *Os homomorfismos* i_λ *são injetivos;*
- *Cada elemento de* P *pode ser escrito de forma única como* $g_1 g_2 ... g_n$ *onde* $g_k \in i_{\lambda_k}(G_{\lambda_k})$ *e* $\lambda_k \neq \lambda_{k+1}$ *para* $k < n$.

Teorema 5. *Seja* $\{G_\lambda = \langle X_\lambda \mid R_\lambda \rangle\}$ *uma família de grupos tal que a família* $\{X_\lambda\}$ *seja composta de conjuntos disjuntos. Então* $P = *_\lambda G_\lambda = \langle \cup_\lambda X_\lambda \mid \cup_\lambda R_\lambda \rangle$.

Exemplo:

- $F(X) = *_{x \in X} \langle x \rangle$.

4 Produto Livre Amalgamado

Definição 5 (Produto Livre Amalgamado)**.** *Sejam* G_1, G_2 *e* S *grupos tais que existam homomorfismos injetores* $p_1 : S \to G_1$ *e* $p_2 : S \to G_2$. *Dizemos que* $(P, \{i_k : G_k \to P \mid k = 1, 2\})$ *é o produto livre amalgamado de* G_1 *e* G_2 *em* S *se para todo grupo* H *e homomorfismos* $\{j_k : G_k \to H | k = 1, 2\}$, *tais que* $j_1 p_1 = j_2 p_2$, *existe um* *homomorfismo $\varphi : G \to H$ tal que o diagrama abaixo é comutativo*

$$\begin{tikzcd}
 & G_1 \arrow[dr, "j_1"'] \arrow[drr, "i_1"] & & \\
S \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & & H & P \arrow[l, "\varphi"] \\
 & G_2 \arrow[ur, "j_2"] \arrow[urr, "i_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

É possível mostrar que o produto livre amalgamado sempre existe e é único a menos de isomorfismo. Denotamos neste caso $P = G_1 *_S G_2$.

Teorema 6 (da Forma Reduzida)**.** *Seja $(G, \{i_1, i_2\})$ o produto livre amalgamado de G_1 e G_2 em S. Então:*

- *(Teorema da Forma Normal) i_1 e i_2 são homomorfismos injetores e $i_1 p_1(S) = i_2 p_2(S)$;*
- *Qualquer $w \in G - S$ pode ser escrito como*

$g_1g_2...g_n$ tal que g_k pertence alternadamente a $i_1(G_1 - p_1(S))$ e $i_2(G_2 - p_2(S))$;

- *Caso w também possa ser escrito como $h_1h_2...h_m$, onde h_k pertence alternadamente a $i_1(G_1 - p_1(S))$ e $i_2(G_2 - p_2(S))$, então $h_1 \in g_1(i_1p_1(S))$, $h_n \in (i_1p_1(S))g_n$ e $h_k \in (i_1p_1(S))g_k(i_1p_1(S))$ pasr os demais k's.*

5 Conclusão

Apartir da apresentação de um grupo podemos evidenciar propriedades de certos elementos do grupo sobre a operação definida no grupo. Isso é bem interessante e abre caminho para as aplicaçoes de teoria dos grupos em topologia. Podemos usar os conceitos de produto livre e produto livre amalgamado para encontrar apresentações mais razoáveis de certos grupos em certas ocasiões.

6 Bibliografia

- Cohen, Daniel E. - Combinatorial group theory: a topological approach. London Mathematical Society Student Texts, 14. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.