Equação da Condução do Calor

Marivaldo Felipe de Melo e Prof. Dr. José Carlos Magossi (Orientador)
mfellipe@hotmail.com e magossi@ceset.unicamp.br - Orgão de Fomento: SAE

Palavras-Chave: Equação do Calor, Séries de Fourier e Equações Diferencias Parciais

INTRODUÇÃO

O objetivo desse trabalho é investigar a equação da condução do calor no que diz respeito a sua dedução, solução, análise das soluções e indicar os setores industriais que se valem da equação da condução do calor para obter inovações tecnológicas. Essas informações estão acompanhadas de contexto histórico, e bem detalhadas, enfatizando assim o caráter didático.

CONTEXTO HISTÓRICO

Na metade do século XVIII, motivados pelo problema de vibração de cordas, matemáticos debateram sobre a expansão de funções arbitrárias em séries trigonométricas. D´Alembert, Euler, Bernoulli e Lagrange desenvolveram a matemática da época e aproximaram-se do que hoje é conhecido como série de Fourier.

Utilizando a teoria de seus antecessores, em 1807 Fourier submeteu seu primeiro trabalho a Academia Francesa, onde formalizou e solucionou o problema de condução do calor. Seu trabalho não foi aceito e um concurso foi criado para premiar quem solucionasse o problema. Em 1811, Fourier submeteu novamente seu trabalho, mas a banca julgadora mais uma vez resolveu não publicá-lo, alegando falta de rigor. A publicação dos seus trabalhos só ocorreu mais tarde, quando Fourier tornou-se secretário da Academia.

Assim, a teoria de Fourier foi reconhecida, porém não finalizada, pois novos problemas surgiram do seu trabalho. Equações Diferenciais, Análise, Integral e Teoria dos Conjuntos foram algumas das áreas que desenvolveram-se ou aprimoraram-se depois da teoria de Fourier.

A EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO DO CALOR

- Barra retilínea, de seção uniforme e de material homogêneo. Cada seção reta $u(x,t)$ fornece a temperatura da barra na posição x. $0 < x < L$ e $t > 0$

- A barra está isolada nas laterais e a temperatura nas extremidades é mantida a $0ºC$. Condições de contorno: $u(0,t) = 0$ e $u(L,t) = 0$ com $t > 0$.

- Assume-se que em $t = 0$, a temperatura em cada seção reta vertical da barra é conhecida. Condição Inicial: $u(x,0) = f(x)$ com $0 \leq x \leq L$.

Método de Solução: Separação de variáveis

Considere que $u(x,t)=X(x).T(t)$. Substituindo as derivadas $\begin{cases} X'' + \sigma X = 0 \\ T' + \sigma\alpha^2 T = 0 \end{cases}$

Sistema homogêneo de duas EDP ordinárias, cujas soluções são:

$$T(t) = ke^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} \qquad X(x) = k_2 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ para } n = 1,2 \ldots$$

A hipótese inicial, no método de separação de variáveis, era encontrar $u(x,t) = X(x).T(t)$. Segue-se então que:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}}$$

Onde:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

VARIAÇÃO DA TEMPERATURA NO SOLO

Dentre as diversas aplicações de EDP, uma que se destaca é o estudo da variação da temperatura no solo. Este estudo é útil para muitos campos da agricultura, pois a temperatura do solo influencia diversos processos químicos, físicos e biológicos que ocorrem neste.

Considerando que apenas a radiação solar varia a temperatura do solo e tomando a terra como um semi-espaço de $\mathbf{R}^3$, obtemos uma situação que representa o problema de condução do calor. Onde, as superfícies laterais estão isoladas e o ponto $x = 0$ (superfície terrestre) está sofrendo influência de uma fonte de calor: a radiação solar. Representada pela função periódica $f(t)$, que pode assumir período de um dia, uma semana ou um mês, dependendo do período de tempo em que se deseja estudar a variação de temperatura.

Em resumo para este modelo, o problema é determinar a temperatura $u(x,t)$ que satisfaz a equação do calor e com condição de fronteira:

$$u(0,t) = f(t) \text{ com } t \in \mathbb{R}$$

Resolvendo a equação do calor temos que a temperatura do solo pode ser encontrada por:

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n u_n(x) e^{2in\pi t/T}$$

SOFTWARE DE APOIO A SOLUÇÃO DE EDP

Os gráficos abaixo, plotados no Matlab representam a variação de temperatura em uma barra de metal com $50\ cm$ de comprimento e com as extremidades mantidas a $0\ ºC$. A barra inicialmente é mantida a $20\ ºC$.

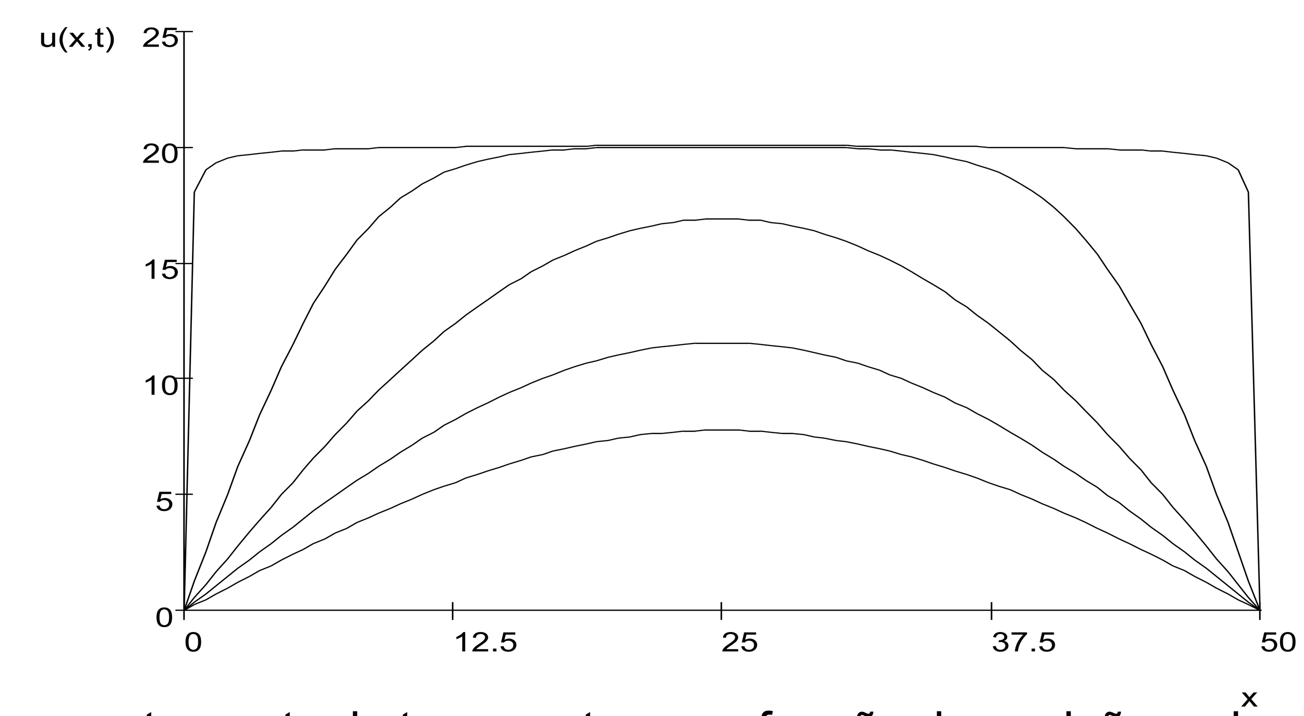

Figura 1 - Comportamento da temperatura em função da posição na barra para 5 instantes (de cima para baixo): t = 0, t = 20, t = 100, t = 200, t = 300.

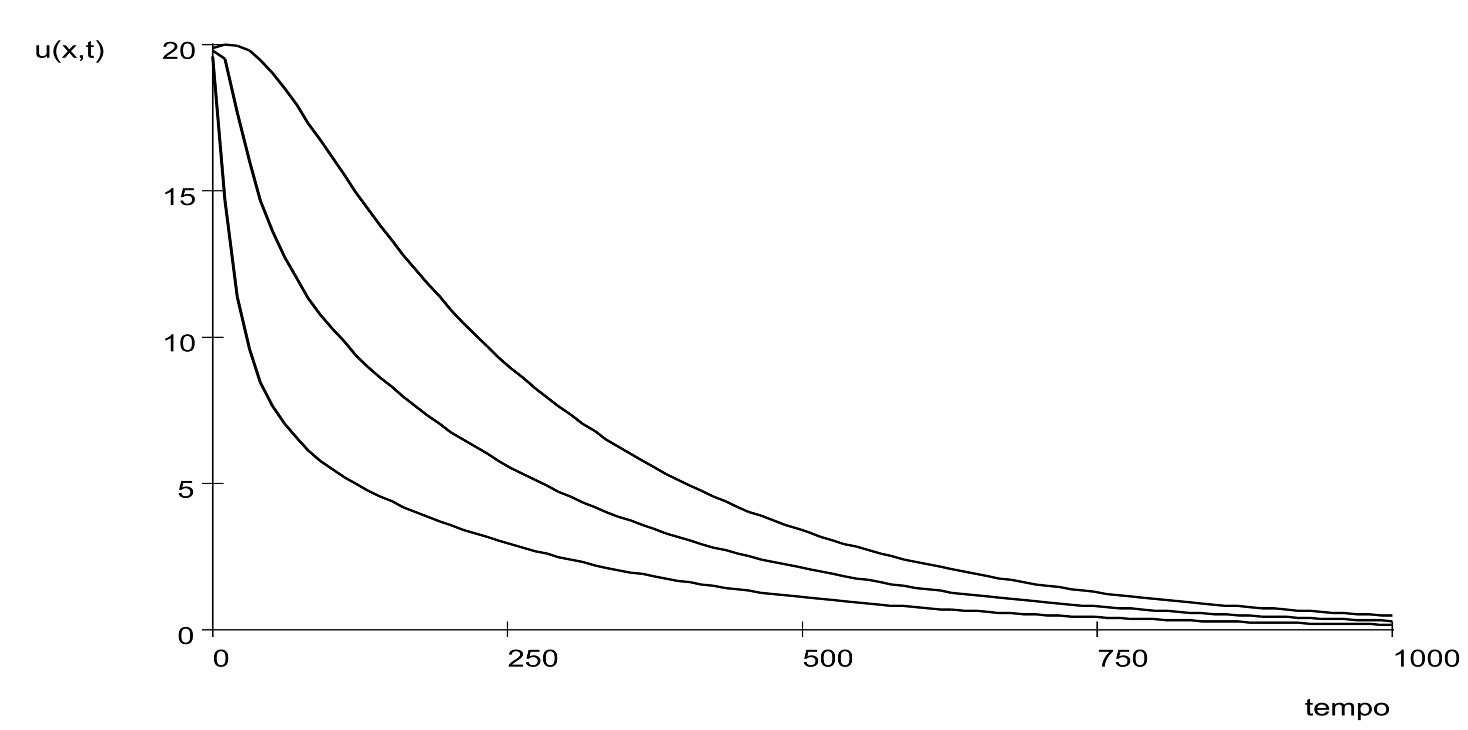

Figura 2 - Comportamento da temperatura em função do tempo, para posições na barra (da esq. para dir.): t = 0, t = 20, t = 100, t = 200, t = 300.

REFERÊNCIAS

[1] Carslaw, HS.. *Introduction to the Theory of Fourier´s Series and Integrals*. Dover Publications, New York, 1952.
[2] Figueiredo, D.G.. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Projeto Euclides-IMPA, 2005.