EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E FLUXOS SUBSÔNICOS - SUPERSÔNICOS

IMECC - UNICAMP

Paulo Alexandre Yuji Okuda (paulookuda@hotmail.com)
Prof. Dr. José Luiz Boldrini

Agência financiadora: PIBIC - CNPq

Equações diferenciais - Fluxos subsônicos - Escoamento compressível - Número de Mach

Introdução

O estudo de equações diferenciais tem muita importância, tanto em seus aspectos teóricos que motivaram e ainda motivam muito do desenvolvimento da Matemática, quanto em seus aspectos de aplicação, uma vez que muitos fenômenos da natureza são descritos em modelos que usam equações diferenciais.

Metodologia

Para entendermos a importância do estudo das equações diferenciais utilizamos um problema simplificado de escoamento de fluidos compressíveis. Especificamente, dado um perfil do bocal (escape), a velocidade inicial do fluxo e a posição do corte inicial do perfil, queremos encontrar a posição de corte final do perfil para que o fluido saia do bocal com velocidade sônica.

Este modelo supõe que o escoamento é estacionário, unidimensional e adiabático; após a análise foi obtida finalmente uma equação diferencial ordinária cuja variável independente é a distância ao longo do bocal e a incógnita é o quadrado do número de Mach do escoamento.

Resultados

Da equação de continuidade, obtemos:

$$\omega = \rho A v$$

onde a velocidade ω da variação de massa do fluxo é constante, A é a área da entrada do bocal, v é a velocidade do fluxo e ρ é a densidade de massa do fluido.

Da equação de quantidade de movimento, obtemos:

$$pA - (p+dp)(A+dA) - \tau\, dS = \omega\, dv$$

onde p é a pressão na entrada do bocal, dS é o elemento de área lateral do bocal e τ é a tensão cisalhante ao longo das paredes do bocal dado por:

$$\tau = \frac{1}{8} f \rho v^2$$

onde f é o fator de atrito local de Darcy, supostamente constante.

Da equação de energia, obtemos:

$$\omega h + \omega \frac{v^2}{2} = \omega\,(h+dh) + \omega\,\frac{(v+dv)^2}{2}$$

onde h é a entalpia do fluxo.

Equação Final

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y\left(1+\dfrac{k-1}{2}y\right)\left(\dfrac{kfy}{4} - F'(x)\right)}{(1-y)F(x)}$$

onde k é a razão entre os calores específicos, $F'(x)$ é o diâmetro do bocal, y é o número de Mach ao quadrado e x é o comprimento do bocal

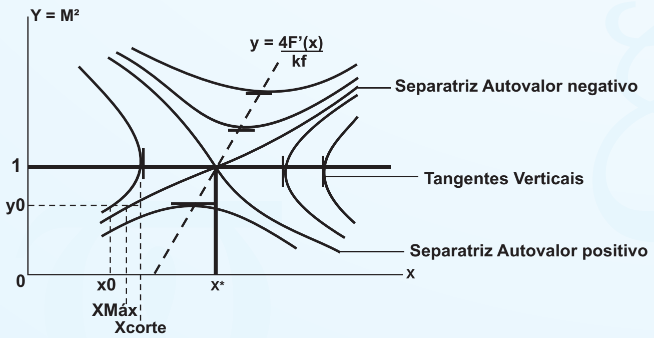

Figura 1 - Gráfico teórico da equação final

Resultados numéricos

Como exemplo, tomamos $F(x) = 0.025x^2 + 0.1$. Para essa função, obtemos que o ponto de equilibro é $(0.7,1)$. Tomamos valores iniciais como na tabela abaixo obtemos as trajetórias mostradas na figura 2.

X Inicial	Y Inicial	Trajetória
0.49	0.89	1
0.495	0.89	2
0.5	0.89	3
0.9	1.1	4
0.905	1.1	5
0.91	1.1	6

Tabela 1 - Valores inicias.

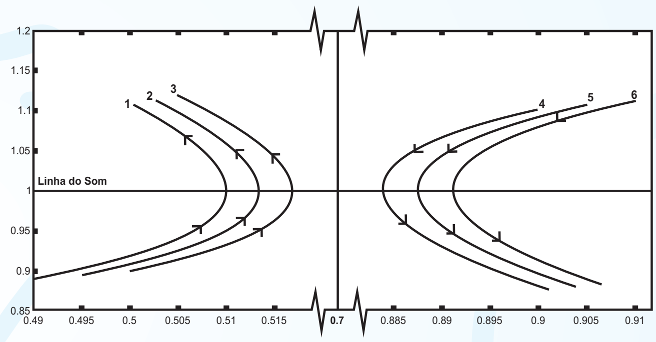

Figura 2 - Trajetórias para $F(x) = 0.025x^2 + 0.1$

Agora, tomando como y inicial igual a 0.5, obtemos que a posição inicial de corte máximo é 0.275. A partir disso, tomaremos como posição inicial de corte menor que 0.275, por exemplo, 0. Então, para valores iniciais (0,0.5) encontramos como posição final de corte 0.2726 e a partir desses dados plotamos o perfil abaixo.

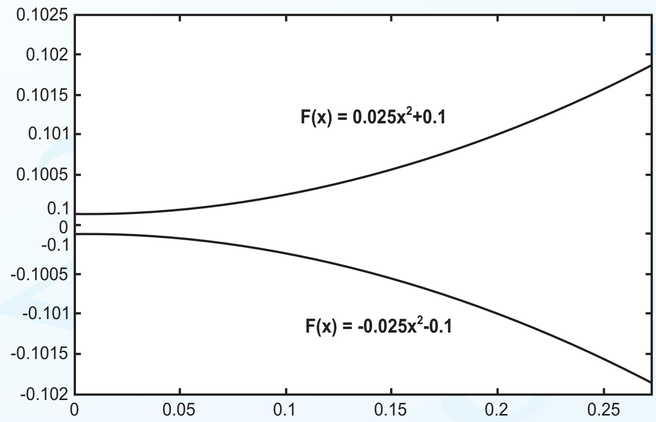

Figura 3 - Perfil do bocal de escape.

Conclusões

Durante o projeto tivemos a oportunidade de aprender vários aspectos de equações diferenciais que normalmente não são enfatizados durante o curso de graduação. Além disso, o estudo dos fundamentos da Mecânica dos Meios Contínuos permite uma melhor compreensão do papel desempenhado pelas Leis de Balanço (Conservação) na dedução de modelos mais realistas de fenômenos naturais, e em particular do papel essencial da clareza e explicitação das hipóteses simplificadoras consideradas na dedução do modelo. O desenvolvimento do projeto também nos permitiu uma melhor valorização de softwares como o Matlab para o desenvolvimento científico.Durante a análise do projeto tivemos a oportunidade de observar que algumas hipóteses simplificadoras poderiam ser generalizadas e assim termos modelos mais realistas da situação analisada.