

O Método do Momento de Inércia e a Análise de Componentes Principais no Estudo de Anisotropia em Raios Cósmicos do Observatório Pierre Auger



B. Daniel, R. M. de Almeida, R. A. Batista, F. Catalani, E. Kemp

Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas

bdaniel@ifi.unicamp.br

1. Introdução

Neste trabalho descrevemos a aplicação de um método denominado MIIE (Estimador de Isotropia do Momento de Inércia), que identifica anisotropias na direção de chegada de eventos do Observatório Pierre Auger sem necessidade de correlacionar com catálogos de objetos celestes.

1.1 O Observatório Pierre Auger

O Observatório de Raios Cósmicos Pierre Auger tem como objetivo estudar os raios cósmicos de energia ultra-alta. Ele foi projetado com o propósito de aumentar a estatística de eventos na região de energia ultra-alta, utilizando detectores de superfície e fluorescência (figura 1), cobrindo uma área de mais de 3000 km^2 (figura 2).



Figura 1: Detectores utilizados no Observatório.



Figura 2: Disposição dos detectores do Observatório.

1.2 Técnica do Momento de Inércia

Considerando n pontos de massa unitária numa esfera, com cossenos diretores l_i , m_i e n_i em relação a uma direção \vec{u} , temos:

$$M = \vec{u}^T (n\mathbf{I} - \mathbf{T}) \vec{u} \quad (1)$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sum l_i^2 & \sum l_i m_i & \sum l_i n_i \\ \sum l_i m_i & \sum m_i^2 & \sum m_i n_i \\ \sum l_i n_i & \sum m_i n_i & \sum n_i^2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Na técnica do momento de inércia, a análise das combinações dos autovalores (τ_i) e autovetores (\vec{t}_i) da matriz \mathbf{T} fornece uma indicação do tipo de distribuição dos pontos na esfera. A aplicação deste método aos eventos de raios cósmicos fornece informações relevantes para o estudo de anisotropias.

1.3 Método do Estimador de Isotropia do Momento de Inércia

O objetivo do método do MIIE (Moment of Inertia Isotropy Estimator) é determinar a probabilidade P_{iso} de isotropia em um determinado conjunto de eventos. Para isso utiliza-se a Técnica do Momento de Inércia para construir um estimador de isotropia, a partir do qual calcula-se:

$$P_{iso}(\xi) = \frac{N_{\xi_{iso} \geq \xi}}{N_{iso}}, \quad (3)$$

onde $N_{\xi_{iso} \geq \xi}$ ($N_{\xi_{iso} \leq \xi}$) é o número de conjuntos isotrópicos cujo estimador ξ_{iso} é maior do que o obtido ξ a partir do conjunto de eventos do qual deseja-se calcular P_{iso} e N_{iso} é o número total de conjuntos isotrópicos simulados.

O estudo da eficiência do método leva em conta os erros em testes de hipótese. Sendo definido o poder do teste $1 - \beta$ para um nível de confiança α .

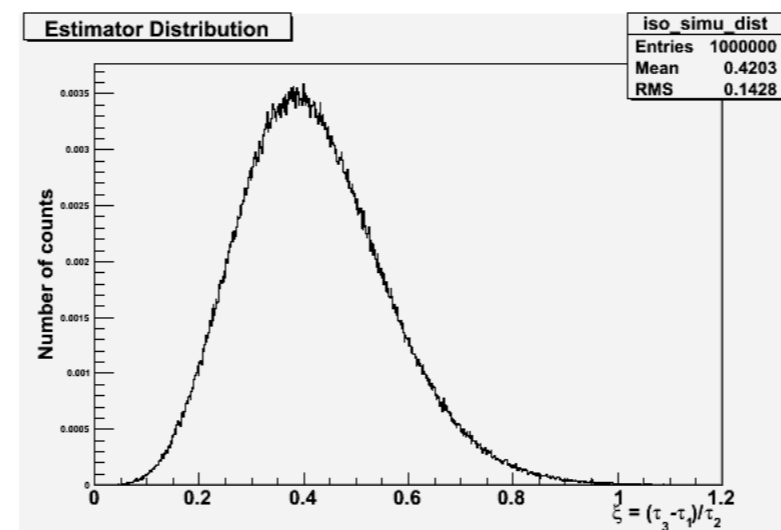


Figura 3: Distribuição de ξ_{iso} para um estimador arbitrariamente escolhido.

1.4 Análise de Componentes Principais

Algebricamente, a Análise de Componentes Principais, PCA ([3]), realiza uma mudança de base num conjunto de variáveis aleatórias, na qual as componentes principais são vetores que formam uma nova base, escritos como combinações lineares destas variáveis. Geometricamente, essas combinações representam a seleção de um novo sistema de coordenadas, obtido através da rotação do sistema original. Os novos eixos representam as direções com máxima variabilidade (maior variância).

A aplicação desta técnica tem como objetivo a determinação de um estimador que maximize a capacidade de discriminação de anisotropias.

2. Metodologia

O Método do Estimador de Isotropia do Momento de Inércia será aplicada a simulações de eventos com diferentes distribuições para dois estimadores: o mostrado na Figura 3 e o determinado pela PCA. Os conjuntos analisados estão descritos na tabela 1. A técnica foi aplicada também a dados reais, primeiro considerando o mesmo conjunto de 27 eventos utilizado em [4], e depois para dados mais recentes, considerando os 58 eventos com energia maior que $55 EeV$.

Tabela 1: Quadro sinótico contendo a descrição de cada conjunto simulado

Distribuição	Descrição
Isotrópica	Conjuntos de eventos gerados segundo distribuição isotrópica.
Dipolo	Conjuntos gerados segundo dipolos orientados na direção \vec{z} .
Quadrupolo	Conjuntos gerados segundo quadrupolo com simetria no eixo \vec{x} .
IRAS0020-ISO	Conjunto gerado com 30 eventos isotrópicos mais 30 eventos gerados segundo o catálogo IRAS
VCV0020	Conjunto de 60 eventos gerados segundo o catálogo VCV. A probabilidade de detecção é pesada por $1/z^2$ ($z = \text{redshift}$).
VCVflat0020	Conjunto gerado com 60 eventos segundo o catálogo VCV.

3. Resultados e Discussão

3.1 Aplicação do Método do Momento de Inércia

A tabela 2 mostra o poder do teste para níveis de confiança de 10% e 1% para os mockmaps descritos na tabela 1.

Tabela 2: Poder do teste ($1 - \beta$) para 10000 conjunto de 60 eventos.

Distribuição	$1 - \beta$ ($\alpha=10\%$)	$1 - \beta$ ($\alpha = 1\%$)
Isotrópica	0,1016	0,0107
Dipolo em \vec{z}	0,9451	0,5091
Dipolo em $-\vec{z}$	0,2611	0,0649
Quadrupolo em \vec{x}	1,0000	1,0000
Irass0020-ISO	0,1573	0,0235
VCV0020	1,0000	1,0000
VCVflat0020	0,9813	0,8996

Afim de testar a eficiência do método em função do tamanho do conjunto de eventos e da diluição do sinal, ou seja, da razão sinal/ruído, foram construídos gráficos como o da figura 4 abaixo.

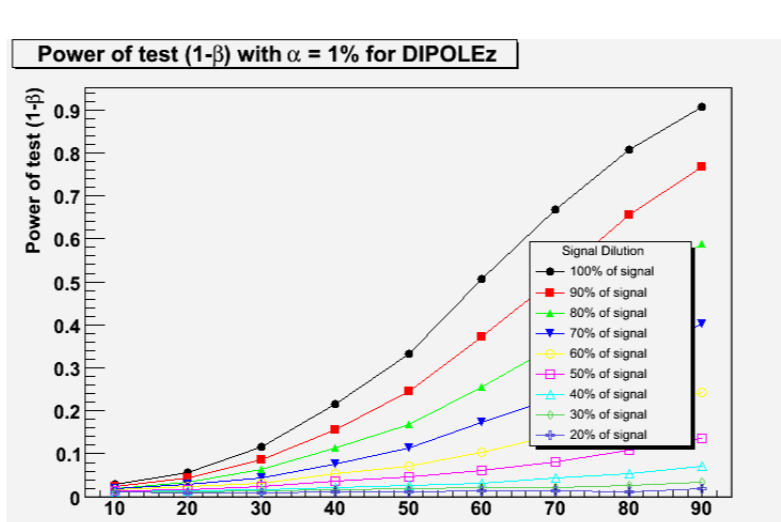


Figura 4: Estudo da razão sinal/ruído para o caso do dipolo em z

3.2 Aplicação da Análise de Componentes Principais

Aplicando-se a PCA aos autovalores obtidos para um conjunto de eventos isotrópicos, determinou-se que a base para estes autovalores que carrega a maior variância é dada por $(0.754, -0.2793, -0.5945)$. Utilizando o estimador dado por $0.754\tau_1 - 0.2793\tau_2 - 0.5945\tau_3$ na análise dos mockmaps da tabela 1 obteve-se os resultados mostrados na tabela 3.

Tabela 3: Poder do teste para os mockmaps utilizando o estimador do PCA

Distribuição	$1 - \beta$ ($\alpha=10\%$)	$1 - \beta$ ($\alpha = 1\%$)
Isotrópica	0,103	0,0111
Dipolo em \vec{z}	0,9663	0,7213
Dipolo em $-\vec{z}$	0,2597	0,0624
Quadrupolo em \vec{x}	1,0000	1,0000
Irass0020-ISO	0,1589	0,0253
VCV0020	0,9354	0,8105
VCVflat0020	0,9820	0,9065

Repetindo também a análise da razão sinal/ruído para o estimador do PCA, para o mesmo caso da figura 4, temos o resultado mostrado na figura 5.

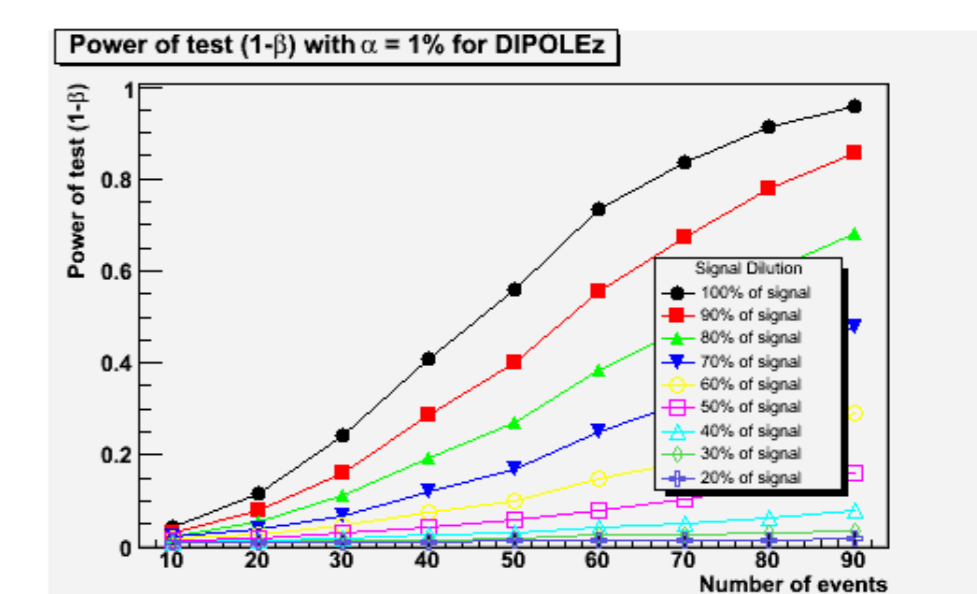


Figura 5: Estudo da razão sinal/ruído para o caso do dipolo em z utilizando o estimador do PCA

3.3 Aplicação a dados reais

Os resultados obtidos com o estimador de isotropia usual e com o do PCA são mostrados na tabela 4. Com ambos os estimadores percebe-se uma diminuição da probabilidade de anisotropia com os dados atualizados.

Tabela 4: Probabilidade de anisotropia para dois conjuntos de dados

Estimador de isotropia	Eventos da Science	Dados atualizados
Usual	0,9446	0,825
PCA	0,9375	0,836

4. Conclusões

Este trabalho possibilita a utilização de uma nova técnica de busca por anisotropias de larga escala em dados do Observatório Pierre Auger, um dos principais objetivos da colaboração internacional. Utilizando o MIIE é possível determinar as probabilidades de isotropia de conjuntos de eventos de forma independente de catálogos. A eficiência desta técnica depende da fração do sinal e também do tipo de anisotropia presente. O uso do PCA não resultou em melhorias significativas.

Referências

- [1] K. V. Mardia, Statistics of directional data, Academic (1972)
- [2] Fischer, N.I., Statistical Analysis of Spherical Data, Cambridge University Press
- [3] Catalani, F., Tese de Doutorado, IFGW - 2008.
- [4] J. Abraham *et al.* [Pierre Auger Collaboration], Science 318, 939 (2007)