Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica-IMECC/UNICAMP
Palavras-chave: Pair-cópula - Análise de dependência - Distribuições multivariadas

Introdução a Modelos Pair-Cópula

Caroline de Freitas Sakamoto[1] & Luiz Koodi Hotta[2]

Introdução

A modelagem de dependência é de importância fundamental em muitas áreas de finanças, tais como, alocação de investimentos, apreçamento de opções e controle de risco.

As cópulas têm sido utilizadas como uma forma alternativa de se modelar a dependência de séries de finanças. Essas funções são utilizadas para modelar a distribuição conjunta de variáveis aleatórias a partir das distribuições marginais e da estrutura de dependência entre as variáveis.

Entretanto a maior parte da literatura trata da dependência, e também na modelagem de dados, apenas no caso bivariado. Um dos motivos é a dificuldade de se encontrar uma forma apropriada de estender o conceito de dependência do caso bivariado para dimensões maiores (multivariadas). Neste sentido, os modelos Pair-cópula tem sido de fundamental importância.

Cópulas

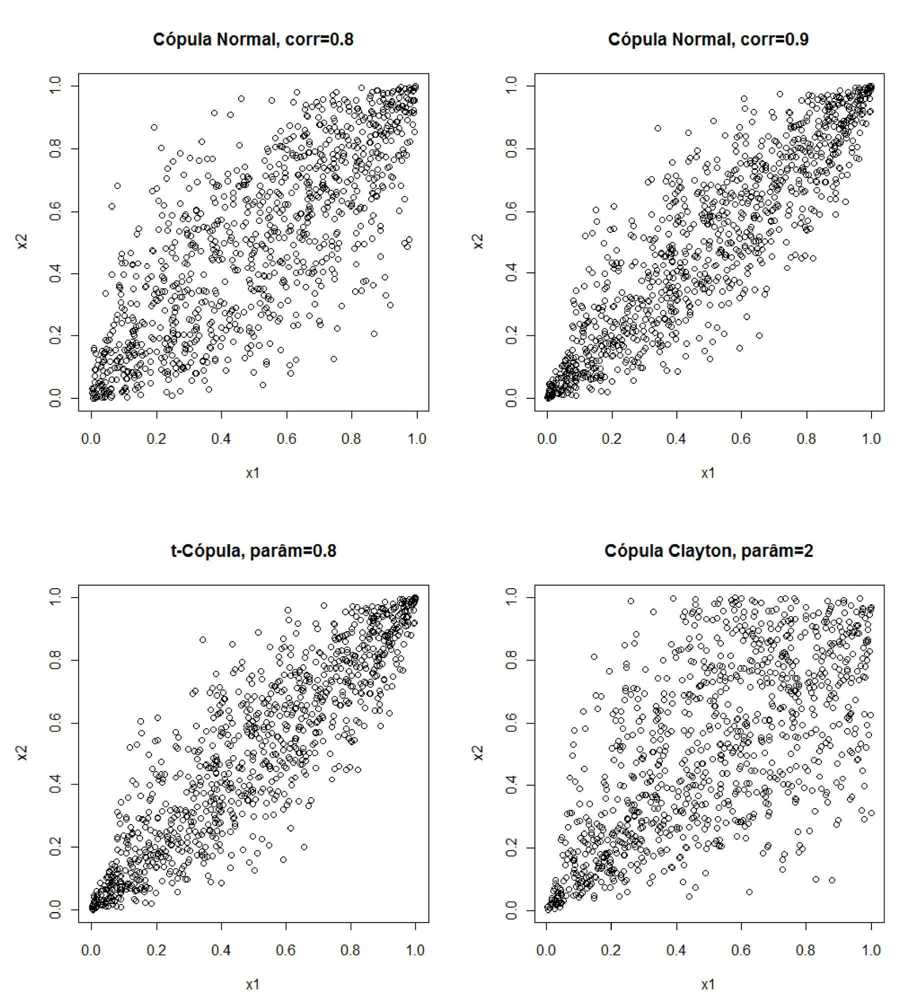
De acordo com Nelsen, cópula pode ser visto sob dois pontos de vista: "sob um ponto de vista, cópulas são funções que juntam ou "acoplam"funções distribuições conjuntas a suas funções distribuições marginais. Alternativamente, cópulas são funções distribuições multivariadas, cujas marginais unidimensionais são uniformes no intervalo $(0, 1)$".

Definição 1 (cópula): Uma função C, com domínio em $[0, 1]^2$ e contradomínio em $[0, 1]$, é uma cópula bidimensional se tem as seguintes propriedades:
1. $C(u, v)$ é crescente em u e v;
2. $C(0, v) = C(u, 0) = 0, C(1, v) = v$, e $C(u, 1) = u$;
3. para $\forall\ u_1, u_2, v_1, v_2$ em $[0, 1]$ tal que $u_1 < u_2$ e $v_1 < v_2$ nós temos $C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$.

Teorema 1 (Sklar): Seja H uma função distribuição conjunta com marginais F e G. Então existe uma cópula C tal que, para quaisquer números reais x e y,

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)). \tag{1}$$

A seguir estão alguns gráficos de cópulas simuladas.



Modelo Pair-Cópula

A metodologia de pair-cópula, inicialmente proposta por Joe (1997). Bedford e Cooke (2001, 2002), propõem a utilização de diagramas vine para a organização dos possíveis modelos. Aas et. al. (2009) apresentam, de forma bem completa, o modelo de decomposição de pair-cópula, apresentando exemplos e algoritmos de simulação e estuda a estimação dos modelos através do método de Máxima Verossimilhança.

Considere o vetor aleatório trivariado $\mathbf{x} = (X_1, X_2, X_3)$. Sua densidade pode ser escrita como:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1)f(x_2|x_1)f(x_3|x_2, x_1), \tag{2}$$

ou como:

$$f(x_2|x_1) = \frac{\partial F(x_2|x_1)}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 C(F_{x_1}(x_1), F_{x_2}(x_2))}{\partial F_{x_1}(x_1)\partial F_{x_2}(x_2)}\frac{\partial F_{x_2}(x_2)}{\partial x_2},$$
$$f(x_2|x_1) = c_{12}(F_{x_1}(x_1), F_{x_2}(x_2))f(x_2), \tag{3}$$

em que c_{12} denota a função de densidade da cópula para $F_{x_1}(x_1)$ e $F_{x_2}(x_2)$.

De forma similar, é possível calcular a densidade condicional de X_3 dado X_1 e X_2.

$$f(x_3|x_2, x_1) = c_{12|3}(F_{1|3}(x_1|x_3), F_{2|3}(x_2|x_3))f(x_3|x_1). \tag{4}$$

Com o objetivo de facilitar e organizar a vizualização das possibilidades que este tipo de modelagem possibilita, Bedford e Cooke (2001, 2002) introduziram o modelo gráfico da "regular vine", que foi mais tarde utilizada por Aas et. al. (2009) para expressar as decomposições alternativas da distribuição multivariada.

Nas Figuras abaixo estão representados os diagramas D-vine e vine canônico, as setas indicam o fluxo dos cálculos envolvidos neste modelo.

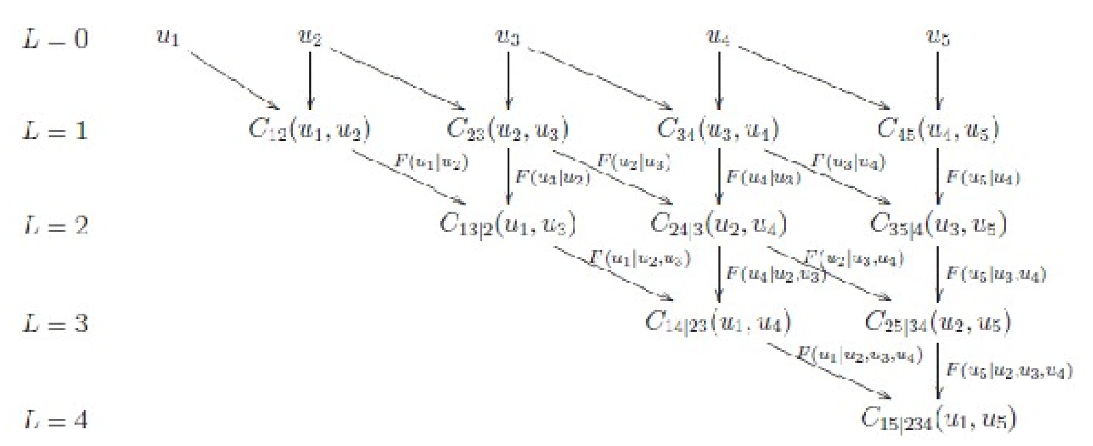


Figure 3: Diagrama do D vine.

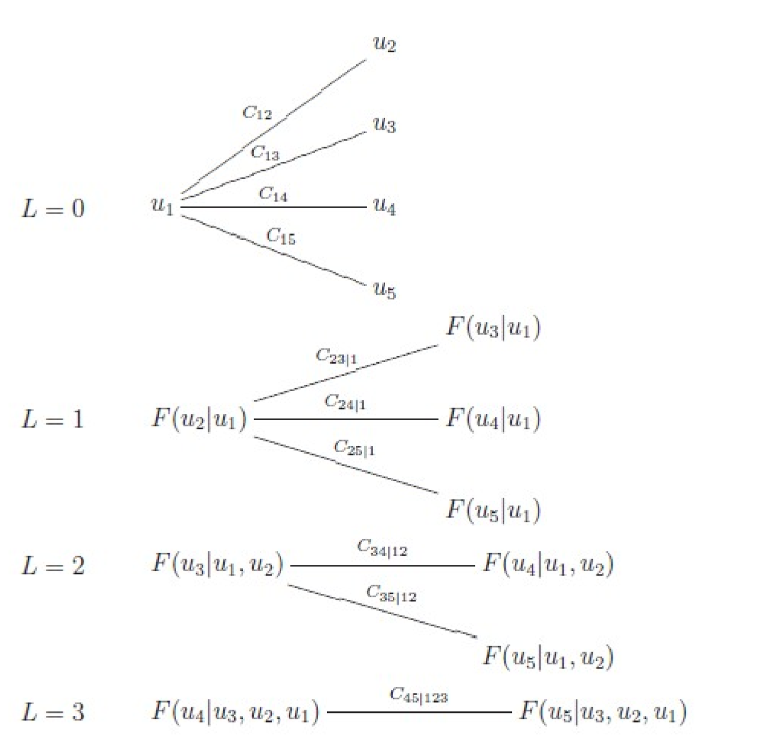


Figure 4: Diagrama do vine canônico.

Aplicação

Para as três séries: NYSE (E.U.A.), Ibovespa (Brasil) e IPC (México), ajustamos um modelo AR(1)-GARCH(1,1), com inovações normal (0,1). Para essas séries de retornos, com $r_t = \ln(P_t/P_t - 1)$, o modelo AR (1)-GARCH (1,1) é dado por:

$$r_t = \mu_t + \phi r_{t-1} + \epsilon_t \tag{5}$$
$$\epsilon_t = \sigma_t \eta_t \tag{6}$$
$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2, \tag{7}$$

onde η_t is i.i.d $N(0, 1)$.

Os modelos Par-Cópula com o diagrama D vine foram ajustados para as estimativas de η_t, para os retornos do Brasil, México e E.U.A., onde (u_1, u_2, u_3) é a ordem dos retornos. Diferentes ordens foram ajustadas para verificar a influência das ordens na modelagem, utilizando sempre a cópula t-Student. Os resultados são apresentados na Tabela abaixo.

Decomposições (u_1, u_2, u_3)	ρ	υ	Verossimilhança	AD
Brasil, México e EUA	0.568	6.074	1396.677	0.367
	0.419	3.026		
	0.339	8.685		
México, EUA e Brasil	0.419	3.407	1383.606	0.589
	0.489	4.811		
	0.446	8.285		
EUA, Brasil e México	0.484	4.197	1378.339	0.661
	0.561	5.822		
	0.210	4.520		

Conclusões

Neste projeto foram comparadas diferentes ajustes de cópulas para os retornos diários das bolsas de valores do Brasil, México e EUA. Ajustamos modelo Pair-Cópula para os três países, com diferentes decomposições D vine. Concluímos que todas as decomposições estudadas ajustam bem a dependência dos dados, porém a decomposição EUA, Brasil e México tem um melhor ajuste. Na sequência do trabalho será estudado a melhor forma de se escolher as cópulas, a decomposição e as influências da escolha das cópulas e decomposição nas propriedades do modelo e seu efeito nas aplicações.

Nos trabalhos em andamento, estudaremos a estimação dos parâmetros do modelo Pair-Cópula por verossimilhança, e a construção desses modelos por análise Bayesiana, visto em Min(2010).

Referências

Aas, K., Czado, C., Frigessi, A. e Bakken, H. (2009) Pair-copula constructions of multiple dependence. *Insurance: Mathematics and Economics* 44, 182-198.

Bedford, T. e Cooke, R. M. (2001) Probability density decomposition for conditionally dependent random variables modeled by vines. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, vol. 32, 245-268.

Bedford, T. e Cooke, R. M. (2002) Vines - a new graphical model for dependent randon variables. *Annals of Statistics* 30, 1031-1068.

Joe, H. (1997) *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman And Hall, Londres.

Min, A. and Czado, C. (2010)*Bayesian inference for multivariate copulas using pair-copula constructions* Journal of Financial. Econometrics.

Nelsen, R. (2006), *Introduction to Copulas*, 2a. edition, New York: Springer Verlag.

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
1: carolsaka@gmail.com e 2: hotta@ime.unicamp.br