Introdução às Vibrações Mecânicas

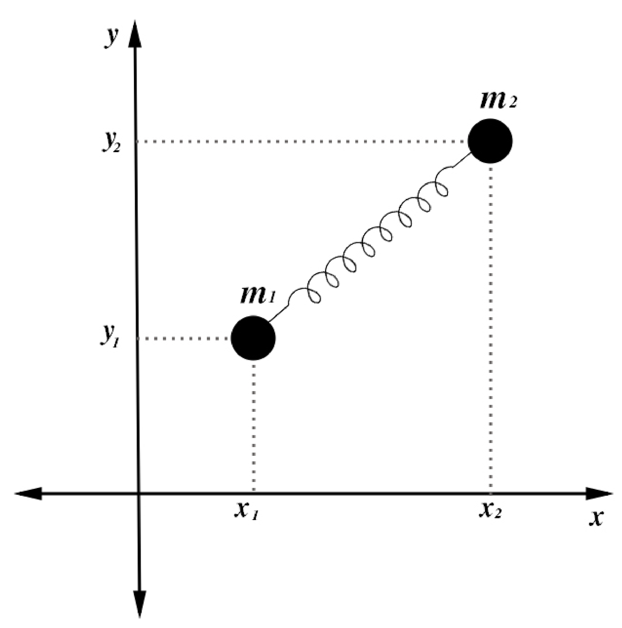
Aluno: Douglas Duarte Novaes
ddnovaes@gmail.com
Orientador: Prof. Dr. Alberto Saa
asaa@ime.unicamp.br
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Introdução

O estudo das vibrações tem uma vasta história, como cita a referência [1]. Suas aplicações são também amplas, variando de aplicações industriais [2] à biofísicas [3].
Neste projeto apresentamos a modelagem de um sistema massa-mola não engastado com a liberdade de se movimentar pelo plano. Investigamos neste sistema de que forma essa liberdade de movimento influência no seu modo normal de vibração.

O Problema

Consideremos um sistema massa-mola constituido de duas partículas **A** e **B**, de massas m_1 e m_2 respectivamente, dispostas no plano bidimensional e conectadas uma na outra por meio de uma mola de massa desprezível, constante elástica k e comprimento l na sua posição não deformada.



Para determinarmos as equações que regem o movimento das partículas utilizamos a teoria da *Mecânica Lagrangiana*, definindo os parâmetros de massa reduzida μ e massa total M do sistema e considerando inicialmente o sistema de coordenadas:

$$x = x_2 - x_1 \,,\; y = y_2 - y_1$$

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1+m_2} \,,\; Y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1+m_2}$$

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \,,\; M = m_1 + m_2$$

Equações de Movimento

Consideramos: energia cinética T, energia potencial V e a lagrangiana $L = T - V$ do sistema de partículas.

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{X}^2+\dot{Y}^2) + \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \,,\; V = \frac{1}{2}k(r-l)^2.$$

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{X}^2+\dot{Y}^2) + \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}k(r-r_0)^2.$$

Aplicando a equação de Euler-Lagrange em L obtvemos as equações de movimento que regem o sistema:

$$\begin{cases} M\ddot{X} = 0 \\ M\ddot{Y} = 0 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \\ \ddot{r} + r\left(\frac{k}{\mu} - \dot{\theta}^2\right) = \frac{kr_0}{\mu} \end{cases}$$

Análise das Equações de Movimento

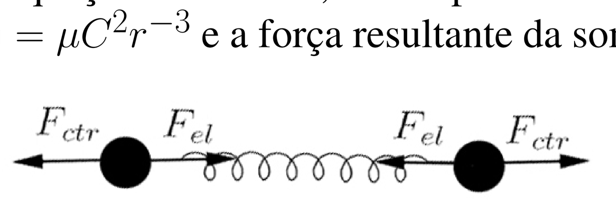
Como já era esperado, as equações para $X(t)$ e $Y(t)$, correspondentes ao movimento de translação, não possuem nenhuma relação com os movimentos de rotação, dado por $\theta(t)$, e vibração, dado por $r(t)$. Para as duas últimas equações, ao denotarmos $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$, obtivemos um sistema não linear de equações diferenciais com incógnitas $r(t)$ e $\omega(t)$.

$$\begin{cases} r\dot{\omega} + 2\dot{r}\omega = 0 \\ \ddot{r} + r\left(\frac{k}{\mu} - \omega^2\right) = \frac{kl}{\mu} \end{cases} , \quad \begin{matrix} r(0) = r_0 \\ \dot{r}(0) = v_0 \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \omega(0) = \omega_0 \end{matrix}$$

Manipulando o sistema obtivemos:

$$\begin{cases} \omega(t) = Cr^{-2}(t) \\ \mu\ddot{r} = \frac{\mu C^2}{r^3} - k(r-l) \end{cases} , C = \omega_0 r_0^2.$$

Podemos observar, na última equação do sistema, as componentes das forças: elástica $F_{el}(r) = -k(r-l)$, centrípeta $F_{ctr}(r) = \mu C^2 r^{-3}$ e a força resultante da soma destas duas $F(r) = \mu\ddot{r}$.



$$F(r) = F_{ctr}(r) + F_{el}(r)$$

Sistema Linearizado

Definição 1 *Dizemos que r_e é Ponto de Equilíbrio, ou de forma equivalente, que o sistema se estabiliza em um ponto r_e, se neste ponto a soma entre a forças centrípeta e elástica se anularem, em outras palavras, se a força resultante neste ponto for nula $F(r_e) = 0$.*

A expressão para a resultante das forças

$$F(r) = \frac{\mu C^2}{r^3} - k(r-l)$$

é não linear, então, supondo a existência de um ponto de equilíbrio r_e, utilizaremos a técnica descrita na referência [4], que consiste na expansão de $F(r)$ em *Série de Taylor*, para aproximarmos e linearizarmos a equação em torno deste ponto. Sendo assim, para deformações próximas do ponto de equilíbrio, o movimento vibratório da mola será regido pela expressão

$$\mu\ddot{r} - F'(r_e)r = -F'(r_e)r_e, \text{ onde } F'(r_e) = k\left(\frac{3l}{r_e} - 4\right)$$

Sabemos que os valores de r para os quais $F(r) = 0$ serão raízes do polinômio quártico

$$P(x) = x^4 - lx^3 - D, \text{ onde } D = \frac{\mu C^2}{k}$$

e pelo Teorema Fundamental da Álgebra, sabemos que $P(x)$ possui 4 raízes.

Proposição 1 *Dado o polinômio $P(x) = x^4 - lx^3 - D$ com coeficientes reais e $D > 0$ existe um único valor $r_e > 0$ de modo que $P(r_e) = 0$.*

Proposição 2 *Dado o polinômio $P(x) = x^4 - lx^3 - D$ com coeficientes reais e $D > 0$ se $r_e > 0$ é tal que $P(r_e) = 0$ então $r_e > l$.*

A **Proposição 1** nos diz que sempre existirá um ponto *único* de equilíbrio r_e da mola para quaisquer parâmetros do sistema e para quaisquer condições iniciais, e a **Proposição 2** nos diz que esse ponto é sempre maior que o tamanho l da mola não deformada.

A expressão algébrica para r_e como raíz do polinômio $P(x)$ é muito complicada e extensa, não sendo vantajoso para nós explicitá-la, fizemos uso dos métodos numéricos descritos na referência [6] para encontrarmos o valor de r_e.
Podemos pensar nessa raíz como uma função dos coeficientes do polinômio até os reais, sendo assim, para um determinado sistema, fixado os parâmetros μ, k e l obtemos o ponto de equilíbrio em função das condições iniciais do sistema r_0 e ω_0,

$$r_e = \phi(r_0, \omega_0).$$

Modo Normal de Vibração

Tendo em mãos a linearização da equação que rege o movimento de oscilação da mola, pudemos encontrar uma expressão para a frequência de vibração do sistema, possibilitando a vizualização dos parâmetros e condições iniciais que influenciam nesta frequência.

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}\left(4 - \frac{3l}{\phi(r_0,\omega_0)}\right)}.$$

Solução do Sistema Aproximado

Encontrado o valor do ponto de equilíbrio r_e, estudamos o sistema de equações diferenciais aproximado para valores de r próximo de r_e. Denotamos $q = -\frac{F'(r_e)}{\mu}$.

$$\begin{cases} M\ddot{X} = 0 \\ M\ddot{Y} = 0 \\ \ddot{r} + qr = qr_e \\ \dot{\theta} = Cr^{-2} \end{cases} , \quad \begin{matrix} X(0) = X_0 & r(0) = r_0 \\ \dot{X}(0) = \dot{X}_0 & \dot{r}(0) = v_0 \\ Y(0) = Y_0 & \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{Y}(0) = \dot{Y}_0 & \dot{\theta}(0) = \omega_0 \end{matrix}$$

Resolvemos o sistema de equações seguindo a referência [5] e obtivemos:

$$X = X_0 + \dot{X}_0 t$$
$$Y = Y_0 + \dot{Y}_0 t$$

$$r(t) = B\cos(\sqrt{q}t - \delta) + r_e$$

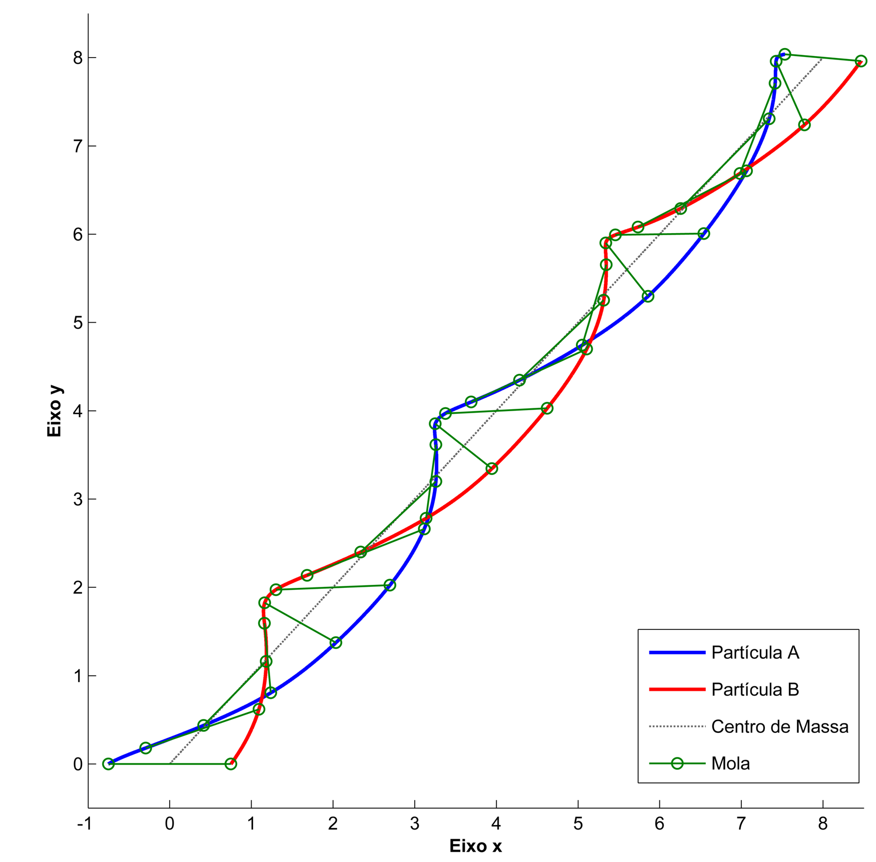
$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \frac{C}{(B\cos(\sqrt{q}t - \delta) + r_e)^2}dt$$

onde

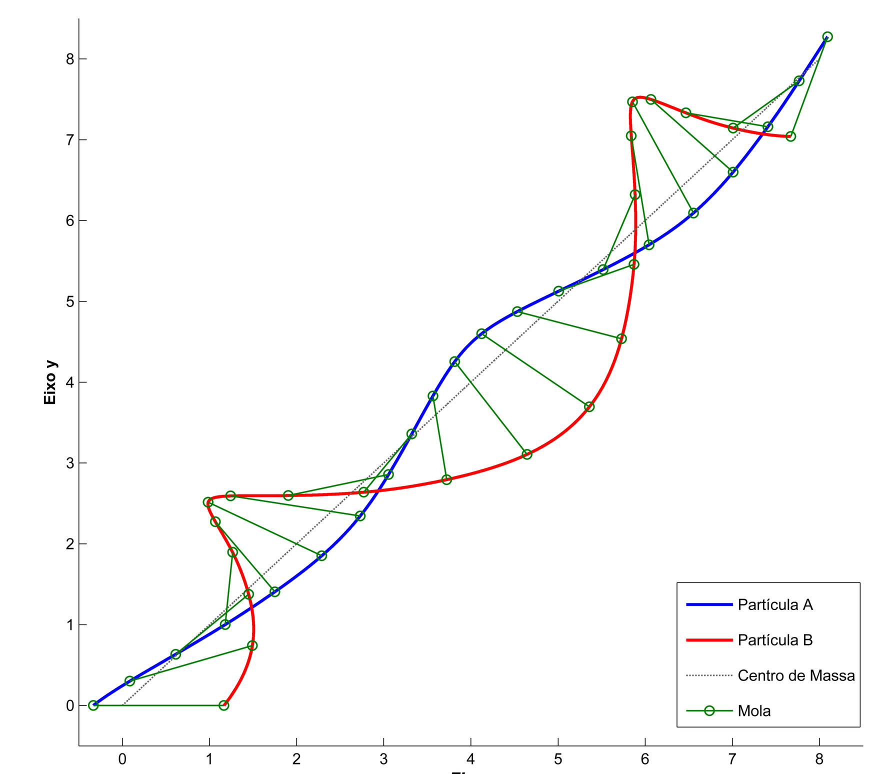
$$B = \sqrt{(r_0 - r_e)^2 + \left(\frac{v_0}{\sqrt{q}}\right)^2} \,,\; \delta = \arctan\frac{v_0}{(r_0 - r_e)\sqrt{q}}.$$

Simulações Numéricas

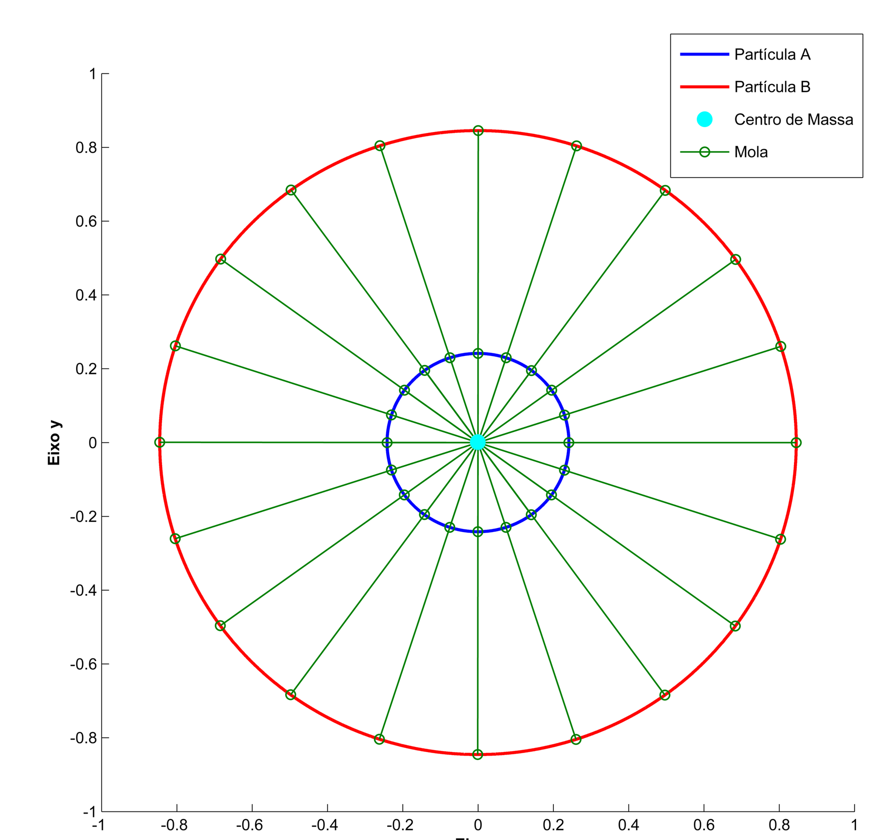
PARTÍCULAS DE MESMA MASSA



PARTÍCULAS COM MASSAS DIFERENTES



MOVIMENTO SEM VIBRACÃO



Referências

[1] A.A. Shabana, *Theory of Vibration: An Introduction*, Springer, 1995.

[2] José Sotelo Jr., Luis Novaes Ferreira França, *Introdução as vibrações mecânicas*, Edgard Blücher, 2006.

[3] K.T. Sen, et. al, *Observation of the low frequency vibrational modes of bacteriophage M13 in water by Raman spectroscopy*, Virol. J. **3**, 29 (2006).

[4] Alfredo M. Ozorio de Almeida, *Sistemas Hamiltonianos: caos e quantização*, Editora da UNICAMP, 1995.

[5] L. Meirovitch, *Fundamentals of Vibration*, McGraw Hill, 2002.

[6] William H. Press, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 2007, Versão on-line: *http://www.nr.com/*.

UNICAMP
CNPq
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico