Introdução a Representações de Álgebras de Lie

Gilmar de Sousa Ferreira — Bolsista

Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura — Orientador

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSCA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

CNPQ

Álgebras de Lie – Representações

As **Álgebras de Lie** surgiram por volta de 1870 da tentativa de se obter uma teoria para os estudos de equações diferenciais análago á teoria de *G*alois, para equações polinomiais. Utilizando as chamadas transformações de contato, *Sophus Lie* examinou um processo criado por *Carl Gustav Jacobi* de obter novas soluções de equações diferenciáveis a partir de uma dada solução. Isso levou Lie a tratar seus grupos de transformações através do que hoje chamamos "*álgebras de Lie*". Com esta descoberta, Lie abandonou seu objetivo inicial relacionado com equações diferenciais e passa a pesquisar as álgebras de Lie.

Um fato que desempenha um papel central na teoria das álgebras semi-simples é que as classes de equivalência das representações irredutíveis de dimensão finita de $\mathfrak{sl}(2)$ são distinguidas entre si por inteiros não-negativos. Um inteiro desses aparece como maior autovalor de determinados elementos da subálgebra de Cartan em apenas uma classe de equivalência de representações irredutíveis. Essa característica das representações de $\mathfrak{sl}(2)$ se generaliza a álgebras semi-simples sobre corpos algebricamente fechados em geral. As representações irredutíveis de dimensão finita dessas álgebras são parametrizadas por l-uplas de inteiros não-negativos, onde l é a dimensão da subálgebra de Cartan. Da mesma forma que em $\mathfrak{sl}(2)$, esses inteiros são autovalores maximais de certos elementos da subálgebra de Cartan e caracterizam os chamados pesos máximos da representação.

Fixemos uma álgebra de Lie L semi-simples e de dimensão finita, H uma subálgebra de Cartan e Φ seu sistema de raízes com grupo de Weyl $\mathscr{W}$ e uma base $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ fixa. A notação que será adotada é a mesma de [1]. Como H é abeliana, $\rho(\mathsf{H})$ é uma familia de operadores diagonais que comutam entre si, isto é, H age diagonalmente em V, e se este tem dimensão finita: $\mathsf{V} = \bigoplus_{\lambda \in \mathsf{H}^*} \mathsf{V}_\lambda$, $\mathsf{V}_\lambda = \{v \in \mathsf{V} : h(v) = \lambda(h)v, \forall h \in \mathsf{H}\}$. Se $\mathsf{V}_\lambda \neq 0$, dizemos que V_λ é um espaço de peso e, é conhecido da álgebra linear que, a soma desses subespaços, de fato, é direta. Dizemos também que λ é um peso de H em V, ou simplesmente um peso de V.

Por exemplo, e talvez o mais importante, é $\mathfrak{sl}(2)$, com base x, y, h, onde $[x, y] = h$, $[h, x] = 2x$ e $[h, y] = -2y$. Um funcinal linear da subálgebra de Cartan é totalmente determinado por seu valor em $h \in \mathfrak{sl}(2)$ e temos que uma base para o sistema de raízes é $\alpha(h) = 2$. O peso máximo em um representação de dimensão $n + 1$ é o funcional λ_n tal que $\lambda_n(h) = n$, como já foi estudado. Um vetor $v \in \mathsf{V}_{\lambda_n}$ é chamado vetor maximal, ele tem a propriedade que $x.v = 0$.

Por analogia definimos um vetor maximal (de pesoλ) um vetor $v^+ \in \mathsf{V}_\lambda$ tal que $x.v^+ = 0$ para todo $x \in \mathsf{L}_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, l$. Essa noção depende da base Δ fixada. Pelo teorema de Lie, a subálgebra de Borel $\mathsf{B}(\Delta) = \mathsf{H} \oplus \sum_{\alpha>0} \mathsf{L}_\alpha$ tem um autovetor em comum, anulado por L_α, $\alpha > 0$, pois B é solúvel. Ainda tentando fazer uma analogia com as representações de $\mathfrak{sl}(2)$, dizemos que $\mathfrak{U}(\mathsf{L}).v$ é um módulo de peso máximo se v é maximal, onde $\mathfrak{U}(\mathsf{L})$ é a álgebra universal envelopante de L. O termo máximo ficará claro pela parte (b) do próximo teorema . A vantagem dessa observação é que podemos aplicar o PBW para obter bases desses submódulos, mais precisamente:

Teorema 1 *Sejam* V *um* L*-módulo de peso máximo com vetor maximal* $v^+ \in \mathsf{V}_\lambda$ *e* $\Phi^+ = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ *as raízes positivas de* Φ*. Então:*
(a) V *é gerado pelos vetores* $y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m} v^+$ $(y_{\beta_j} \in \mathsf{L}_{\beta_j}, i_j \in \mathsf{Z}^+)$*; em particular* V *é soma direta de seus espaços de peso;* (b) *Os pesos de* V *são da forma* $\mu = \lambda - \sum_{j=1}^{l} k_i \alpha_i$ $k_i \in \mathsf{Z}^+$*, isto é, todos os pesos de* V *satisfazem* $\mu \prec \lambda$*;* (c) *Para cada* $\mu \in \mathsf{H}^*$*, temos que* $\dim_{\mathsf{F}}(\mathsf{V}_\mu)$ *é finita e* $\dim_{\mathsf{F}}(\mathsf{V}_\lambda) = 1$*;* ($d$) *Cada submódulo de* V *é soma direta de seus espaços de pesos;* (e) V *é indecomponível (não existem dois submódulos próprios tal que* V *é soma destes), com um único maximal (próprio) submódulo e um único correspondente quociente irredutível;* (f) *Toda imagem por um homomorfismo não nulo é de peso máximo.*

No teorema não supomos V de dimensão finita, apenas que possui um vetor maximal. Não podemos assegurar, em geral, a existência de um vetor maximal,a não ser que V seja de dimensão finita pois de $h.(x.v) = x.(h.v) + [h, x].v = (\lambda(h) + \alpha(h))x.v$ concluímos que L_α mapea V_λ em $\mathsf{V}_{\lambda+\alpha}$ e sendo V de dimensão finita temos que existe apenas um número finito de espaços de peso. Outro fato, quando V é irredutível, é que quando o vetor maximal existe é único, a menos de multiplicação por escalares.

Teorema 2 *Sejam* V, W *módulos de peso máximo* λ*. Se* V *e* W *são irredutíveis, então eles são isomorfos.*

Para cada $\lambda \in \mathsf{H}^*$ podemos equipar F com uma estrutura de $\mathsf{B} = \mathsf{B}(\Delta)$-módulo: $(h + \sum_{\alpha>0} x_\alpha).r = \lambda(h)r$, com $r \in \mathsf{F}$. Com isso, também temos uma estrutura de $\mathfrak{U}(\mathsf{B})$-módulo em F e uma estrutura de $\mathfrak{U}(\mathsf{L})$-módulo em $\mathsf{Z}(\lambda) = \mathfrak{U}(\mathsf{L}) \otimes_{\mathfrak{U}(\mathsf{B})} \mathsf{F}$. Então $\mathsf{Z}(\lambda)$ é um L-módulo de peso máximo λ. Com essa construção e usando o teorema (1) concluímos que $\mathsf{V}(\lambda) = \mathsf{Z}(\lambda)/\mathsf{Y}(\lambda)$ é irredutível e de peso máximo λ, onde $\mathsf{Y}(\lambda)$ é o único maximal submódulo próprio de $\mathsf{Z}(\lambda)$. Assim provamos:

Teorema 3 *Seja* $\lambda \in \mathsf{H}^*$*. Então existe um módulo de peso máximo* $\mathsf{V}(\lambda)$ *de peso* λ*.*

Esses teoremas apresentados aqui mostram que as representações irredutíves que admitem peso máximo são parametrizadas por H^*, no sentido que, para cada $\lambda \in \mathsf{H}^*$, existe uma única representação, a menos de isomorfismo, com peso máximo λ. Seja V uma representação irredutível de dimensão finita com um vetor maximal v^+ de peso λ. Então $\mathfrak{U}(\mathsf{L}).v^+$ é todo V, por irredutibilidade. Portanto, V é isomorfo a $\mathsf{V}(\lambda)$. Para cada raíz simples α_i, seja S_i a cópia de $\mathfrak{sl}(2)$ em L. Então $\mathsf{V}(\lambda)$ é também um módulo sobre S_i, e um vetor maximal para L é um vetor maximal para S_i. Em particular, sempre que o maximal vetor tem peso λ, o peso da subálgebra de Cartan $\mathsf{H}_i \subseteq \mathsf{S}_i$ fica totalmente determinado pelo inteiro não-negativo $\lambda(h_i)$, onde h_i é o gerador de H_i, pelas representações de $\mathfrak{sl}(2)$. Com isso:

Teorema 4 *Se* V *é um irredutível* L*-módulo de dimensão finita e de peso maximal* λ*, então* $\lambda(h_i)$ *é um inteiro não negativo* $(1 \leq i \leq l)$*.*

Dizemos que $\mu \in \mathsf{H}^*$ é integral se $\mu(h_i) \in \mathsf{Z}$ $(1 \leq i \leq l)$ e integral dominante se $\mu(h_i) \in \mathsf{Z}^+$ $(1 \leq i \leq l)$. Pode-se mostrar que conjunto e todos funcionais lineares integrais Λ é um reticulado em H^*, isto é, um Z-módulo livre. Denotamos por Λ^+ o conjunto de todos funcionais lineares integrais dominantes e por $\Pi(\lambda)$ o conjunto de todos os pesos de $\mathsf{V}(\lambda)$. Então temos a recíproca do teorema (**4**):

Teorema 5 *Seja* $\lambda \in \Lambda^+$*, então o* L*-módulo irredutível* $\mathsf{V}(\lambda)$ *é de dimensão finita e* $\Pi(\lambda)$ *é permutado por* $\mathscr{W}$*, com* $\dim_{\mathsf{F}}(\mathsf{V}_\mu) = \dim_{\mathsf{F}}(\mathsf{V}_{\sigma\mu})$*, para todo* $\sigma \in \mathscr{W}$*.*

Em principio, o peso maximal λ contém todas as informações sobre a representação. Apesar disso, é claro que nem sempre é possível explicitar a relação entre λ e as diversas propriedades da representação.

Referências

[1] Humphreys, James E. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag, 1987