

Resumo

A Transformada de Watson-Sommerfeld (TWS) é uma técnica matemática de soma de alguns tipos de séries com grande número de termos (ou de convergência lenta), através da substituição da série original, via teorema de Cauchy, pela soma dos resíduos de uma função com propriedades adequadas ao problema. A aplicação dessa técnica nas soluções da equação de Schrödinger em ondas parciais e teoria do potencial, constitui a base do chamado Formalismo de Regge (FR) das interações hadrônicas (fortes) em altas energias. Neste trabalho, ilustramos a aplicabilidade do formalismo na descrição dos dados experimentais das seções de choque totais próton-próton e antipróton-próton em altas energias (acima de 5 GeV no sistema de centro de massa). Para tanto, utilizamos o Modelo de Donnachie-Landshoff e desenvolvemos a redução (ajuste) dos dados experimentais através do código CERN-Minuit, estudando a aplicabilidade do modelo para diferentes valores da energia de corte (mínima). Os resultados indicaram consistência estatística para energia de corte em 10 GeV. Neste caso, obtivemos como previsão do modelo para a seção de choque próton-próton a ser medida em 14 TeV, no Grande Colisor de Hádrons (LHC, CERN, Genebra), 106 ± 7 mb.

1 Introdução

A Transformada de Watson-Sommerfeld (TWS) é uma técnica matemática que objetiva transformar uma série infinita que possui baixa convergência, através do teorema de Resíduos de Cauchy, em uma outra série, de soma dos resíduos de uma função, com propriedades analíticas adequadas ao problema e com convergência mais rápida. Ela foi desenvolvida por G. N. Watson em 1918 [1] e posteriormente por A. Sommerfeld em 1948 [2].

As aplicações desta técnica em Física de Altas Energias surgiram quando T. Regge a utilizou para estudar o problema de espalhamento. Na época em que o autor desenvolveu sua teoria, acreditava-se que a seção de choque total, das interações fortes (hadrônicas), iria diminuir com a energia até atingir um valor constante maior que zero. Porém ao tentar obter uma expressão analítica para a seção de choque utilizando o modelo de Troca de Uma Partícula, o que se obtinha era uma seção de choque total que divergia. Para solucionar este problema o autor utilizou uma “extensão” do momento angular ℓ , que são inteiros positivos, para valores complexos, de forma semelhante a feita por G. N. Watson e A. Sommerfeld. Com esta abordagem o autor obteve uma nova representação para a amplitude de espalhamento, o que permitia levar à interpretação de que, numa reação de espalhamento em altas energias, não eram trocadas partículas com spin definido, mas sim trajetórias, que estavam relacionadas a estados ressonantes e que foram denominadas “trajetórias de Regge” [3,4].

Neste projeto de Iniciação Científica, foi realizado um estudo detalhado da TWS, com base nos artigos originais de Watson e de Sommerfeld [1,2] e das aplicações físicas da transformada, com foco no formalismo de Regge. Como pesquisa original, estudamos a aplicabilidade do Modelo de Donnachie-Landshoff, para as seções de choque totais próton-próton e antipróton-próton, em função da energia de corte.

Neste painel, apresentamos as ideias básicas da TWS (Sec. 2) e do formalismo de Regge tendo o Modelo de Donnachie-Landshoff como caso particular (Sec. 3). Os resultados das reduções de dados são apresentados na Sec. 4 e as conclusões na Sec. 5.

2 Transformada de Watson-Sommerfeld: Ideia Geral

O formalismo empregado na TWS está intimamente relacionado ao teorema de resíduos de Cauchy [6] e para desenvolver a transformada podemos dizer que existem três passos básicos:

- *Primeiro passo:* tome uma função $F(x)$, expressa na forma de uma série infinita

$$F(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(x)$$

e substitua os valores $l \in \mathbb{N}$ por valores complexos, denotados ν , tal que $\nu = \text{Re } \nu + i \text{Im } \nu$ e $\text{Re } \nu = l$.

- *Segundo passo:* encontre uma função $g(\nu)$ e um contorno adequado no plano complexo, de forma que ao calcular a integral de resíduos de $g(\nu)$ e tomar $\nu = l$ a função $F(x)$ será recuperada.

A título de ilustração considere o contorno da Fig. 1, podemos escrever

$$\oint_A g(\nu) d\nu = 2\pi i \sum_{m=0}^N \text{Res } g(\nu)|_{\nu=\nu_m},$$

onde ν_m são os polos de $g(\nu)$. Assim, ao tomar o contorno A , representado na Fig. 1, obtém-se

$$2\pi i \sum_{m=0}^N \text{Res } g(\nu)|_{\nu=\nu_m} = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(x).$$

- *Terceiro passo:* conhecendo a função $g(\nu)$, analise outros possíveis polos desta função. Estes devem estar presentes no plano- ν , denotados ν_m , $m = 0, 1, 2, \dots, N$. Deforme o contorno A , nos contornos B e C , de forma a envolver estes polos, mas sem eles estarem dentro do contorno, como exemplificado na Fig. 1. Analise o comportamento nas vizinhanças dos polos ν_m para obter a solução por resíduos em função destes polos.

O método é útil quando esta nova série de resíduo, apresenta uma convergência mais rápida que a série original.

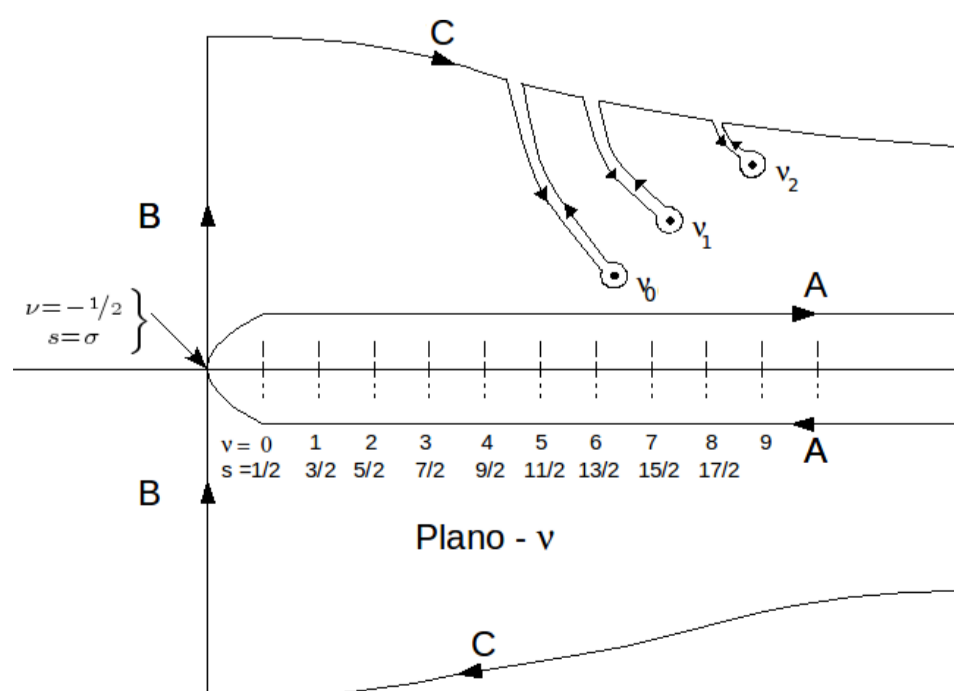


Fig. 1: Polos de $g(\nu)$ que estão no eixo real no plano- ν complexo.

3 Teoria de Regge e Modelo de Donnachie-Landshoff

3.1 Amplitude de Espalhamento e Ondas Parciais

No contexto da mecânica quântica, para uma partícula incidente, representada por uma onda plana de momento k , longe do centro espalhador, a função de onda associada ao estado de espalhamento estacionário, que é dada por

$$\psi_k \sim e^{ikz} + F_k(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r},$$

onde r , θ , φ são coordenadas esféricas, $k^2 = 2\mu E$, E é a energia total, μ a massa reduzida e $F_k(\theta, \varphi)$ a amplitude de espalhamento.

Para potencial central (simetria azimutal) a equação de Schrödinger possui soluções na forma de ondas parciais e nesse contexto a amplitude de espalhamento é expressa por [7]

$$F(k, \theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(k) P_l(\cos \theta). \quad (1)$$

Em altas energias é útil a utilização das variáveis de Mandelstam (invariantes de Lorentz) [4]

$$t = -2k^2(1 - \cos \theta), \quad s = 4(k^2 + m^2) \quad (2)$$

sendo $s = E_{CM}^2 \geq 4m^2$ e $-4k^2 \leq t \leq 0$. Neste caso a amplitude (complexa) é função de 2 variáveis [3]:

$$F = F(s, t) = \text{Re } F(s, t) + i \text{Im } F(s, t).$$

3.2 Transformada de Watson-Sommerfeld-Regge

Processos hadrônicos estão associados à interações entre hádrons, partículas sensíveis a interação forte (ou nuclear). As interações hadrônicas estão relacionadas com troca de partículas. Por exemplo, as interações entre quarks um glúon é trocado, entre elétrons um fóton é trocado [8]. Porém, se transportamos estas ideias para os processos de espalhamento em altas energias, esta simetria aparentemente é quebrada.

Para solucionar esta paradoxo T. Regge propôs que nestas interações não são trocadas partículas com spin definido, mas sim há uma troca de uma trajetória de Regge, que esta relacionada a estados ressonantes, também conhecidas como Reggeon [4]. A estratégia de Regge foi encontrar a representação integral para a solução em ondas parciais (1), de forma semelhante a feita por A. Sommerfeld. O resultado obtido por Regge, em termos das variáveis de Mandelstam (2) é conhecido como Transformada de Watson-Sommerfeld-Regge:

$$F(s, t) = \sum_i \gamma_i(t) \xi_i(t) s^{\alpha_i(t)},$$

onde $\gamma_i(t)$ é a função resíduo, $\xi_i(t)$ o fator assinatura e $\alpha_i(t)$ o momento angular do objeto trocado no canal- t . Este objeto trocado é chamado *Reggeon* [3].

3.3 O Modelo de Donnachie-Landshoff

A amplitude de espalhamento $F(s, t)$ permite determinar a mais importante quantidade física do espalhamento de hádrons, a seção de choque total (Teorema Óptico) [4] em altas energias

$$\sigma_{tot} \sim \frac{\text{Im} F(s, t=0)}{s}.$$

Entre os vários modelos baseados na teoria de Regge existentes para descrever este crescimento da seção de choque, neste trabalho será adotado o modelo de Donnachie-Landshoff, o qual relaciona o crescimento da seção de choque como sendo mediado pela troca de um Reggeon e um Pomeron, este é colocado de forma *ad-hoc* e é o mesmo para reações partícula-partícula e partícula-antipartícula, uma vez que os Pomerons possuem os números quânticos do vácuo [3-5].

Neste modelo a seção de choque total é expressa por

$$\sigma_{tot}(s) = X s^\epsilon + Y s^{-\eta}$$

onde $\epsilon = \alpha_P(0) - 1$ esta associada a troca de um Pomeron e $1 - \eta = \alpha_R(0)$ esta associada à troca de um Reggeon. Esta parametrização adota o primeiro termo igual para a partícula e sua antipartícula, pelo fato do Pomeron ter os números quânticos do vácuo [3-5], isto é $X_{ab} = X_{\bar{a}\bar{b}}$. Para o nosso caso, que é o espalhamento elástico de próton-próton (pp) e próton-antipróton ($p\bar{p}$), os autores encontram

$$\epsilon = 0.0808, \quad X = 21.7 \text{ mb}, \quad Y_{p\bar{p}} = 98.39, \quad Y_{pp} = 56.08 \text{ mb e } \eta = 0.4525.$$

4 Dados Experimentais e Resultados dos Ajustes

Adotando o modelo de Donnachie e Landshoff (DL) desenvolvemos vários ajustes, considerando o limite de altas energias ($\gtrsim 5$ GeV). O ponto central é variar a energia mínima (de corte) para estudar as características dos parâmetros livres. Os dados de seção de choque total foram obtidos do Particle Data Group. Os ajustes foram feitos utilizando o programa Cern-Minuit.

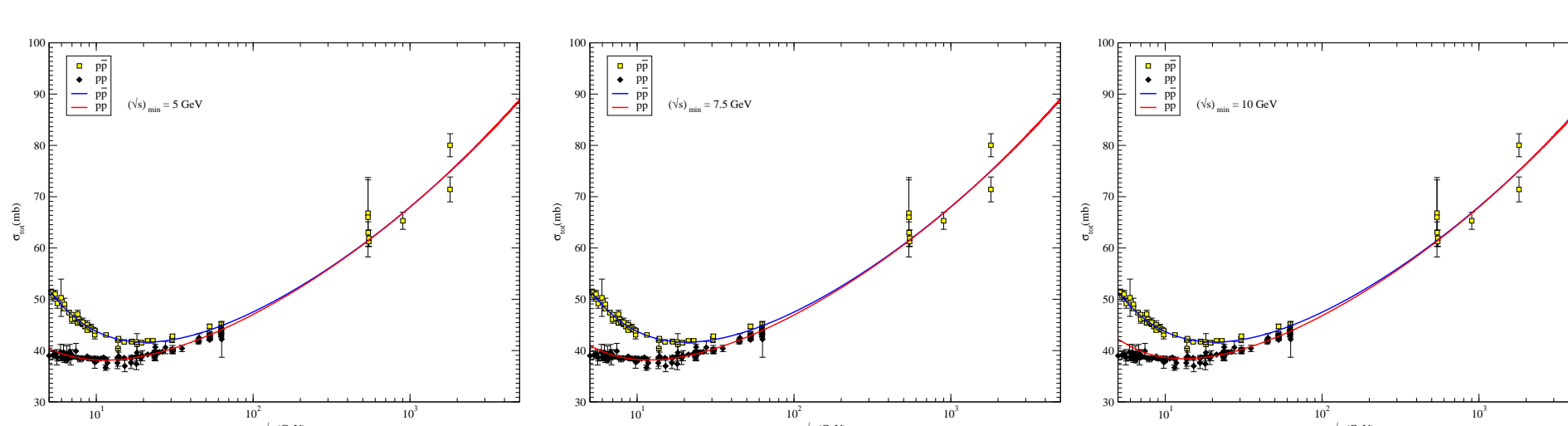


Fig. 2: Resultados dos ajustes para diferentes energias de corte ($(\sqrt{s})_{\text{min}}$).

Tab. 1: Resultados dos ajustes para as seções de choque totais pp e $p\bar{p}$. A primeira coluna $(\sqrt{s})_{\text{corte}}$ representa a energia inicial dos dados da seção de choque total na qual o ajuste foi feito. Cada energia esta sendo representada por blocos, como destacado. Na primeira linha estão os valores dos parâmetros de $p\bar{p}$ e na segunda linha os de pp .

	$(\sqrt{s})_{\text{corte}}$ (GeV)	X (mb)	ϵ	Y (mb)	$-\eta$	gl	χ^2/gl
$p\bar{p}$	5	21.4 ± 0.7	0.084 ± 0.003	110 ± 7	0.47 ± 0.02	55	0.825
		21.4 ± 0.7	0.084 ± 0.003	51.1 ± 0.3	0.439 ± 0.001	102	1.656
pp	7.5	21.2 ± 0.8	0.084 ± 0.003	108 ± 10	0.47 ± 0.02	44	0.956
		21.2 ± 0.8	0.084 ± 0.003	57 ± 2	0.454 ± 0.007	80	1.484
	10	21 ± 1	0.085 ± 0.004	104 ± 20	0.46 ± 0.05	26	1.175
		21 ± 1	0.085 ± 0.004	67.4 ± 0.5	0.475 ± 0.001	64	1.145

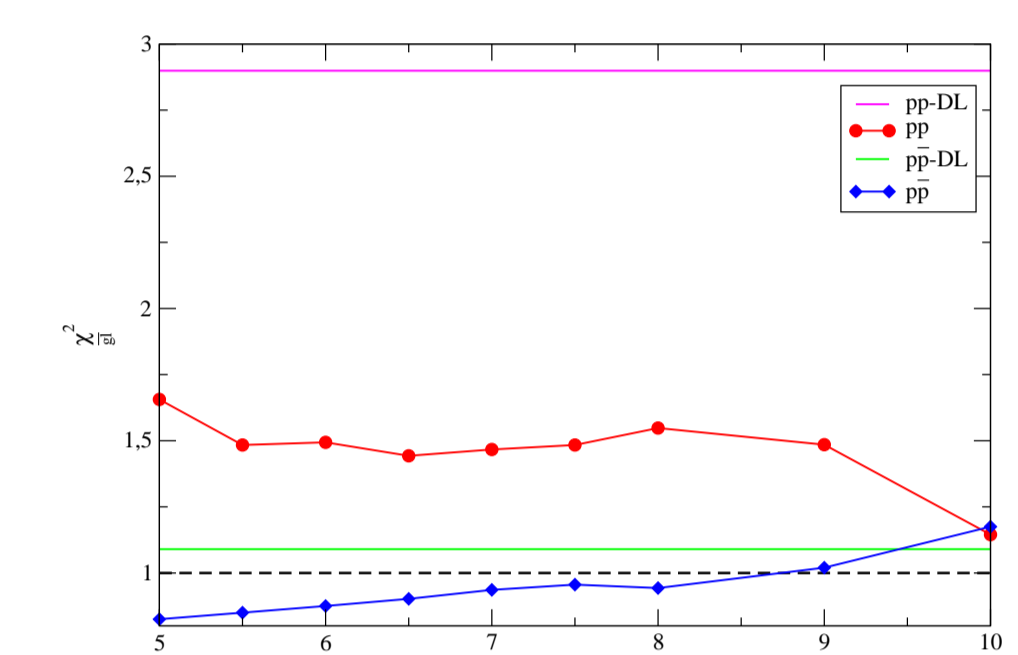


Fig. 3: Variação do χ^2/gl para cada ajuste, o eixo \sqrt{s} corresponde de energia inicial, como apresentado na Tab. 1. A linha cheia é apenas indicativa, não significa ajuste realizado. A linha tracejada é a região de melhor ajuste, ou seja, $\chi^2/gl = 1$, as linhas cheias paralelas a esta (verde e rosa) são os valores de χ^2/gl , admitindo os valores obtidos por Donnachie e Landshoff como parâmetros iniciais.

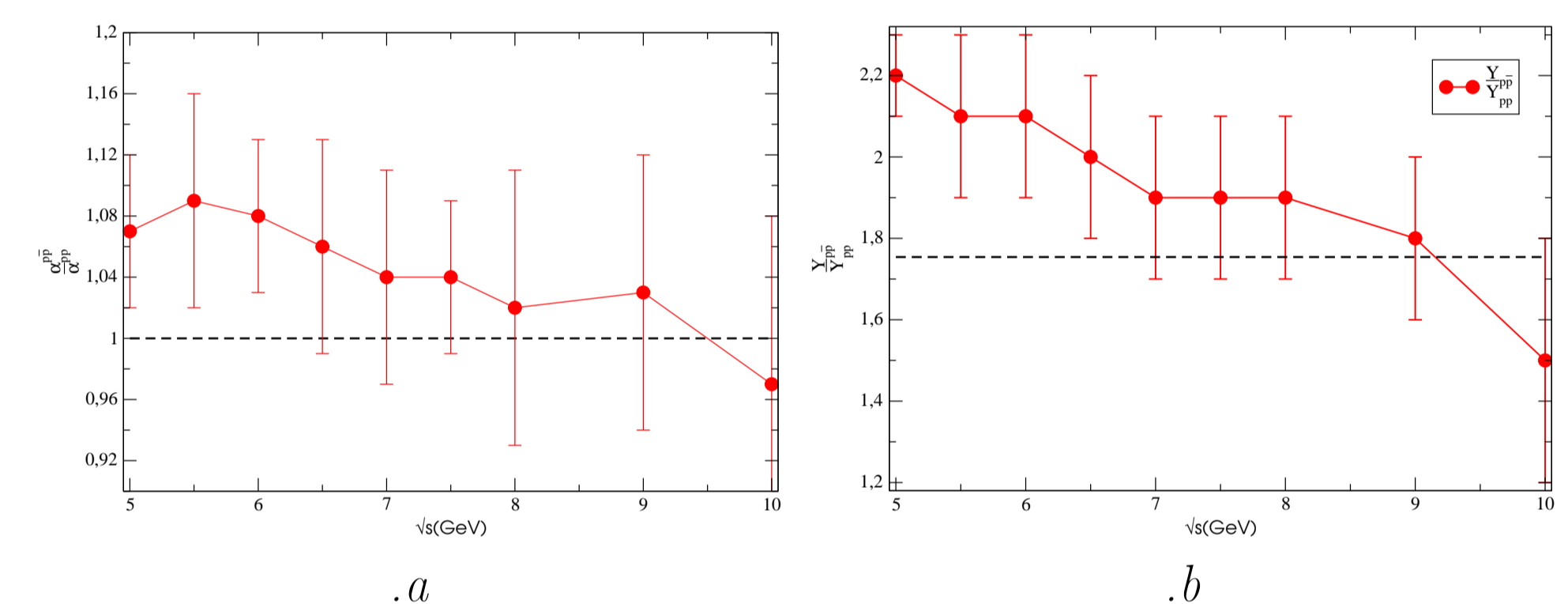


Fig. 4: a) Variação do $\alpha_R^{pp}/\alpha_R^{p\bar{p}}$ e b) variação de $Y^{pp}/Y^{p\bar{p}}$ para cada ajuste. A linha tracejada é correspondente a respectiva fração para os valores obtidos por Donnachie e Landshoff $\left(\frac{\alpha_R^{pp}}{\alpha_R^{p\bar{p}}}\right)_{DL} = 1, \left(\frac{Y^{pp}}{Y^{p\bar{p}}}\right)_{DL} = 1,754$.

5 Conclusões

Neste trabalho estudamos a eficácia do modelo DL em termos da energia de corte. O estudo foi feito sob dois aspectos, o estatístico (χ^2/gl) e a variação do termo de Reggeon(ϵ), pois no modelo utilizado, deixamos para pp os parâmetros do Reggeon como livres. Lembrando que no Modelo de DL, as potências ϵ e η são fixas, tanto para pp quanto $p\bar{p}$, o que varia de um para o outro é a intensidade do termo de Reggeon (Y).

Os valores de χ^2/gl obtidos por DL apresentam um bom ajuste para os dados de $p\bar{p}$, todavia o mesmo não pode ser dito do ajuste para pp . Neste padrão o que se observa é que os ajustes de pp e $p\bar{p}$ possuem uma melhor combinação de χ^2/gl para energia começando em torno de 10 GeV.

Por este modelo é de se esperar que $\alpha_R^{pp}/\alpha_R^{p\bar{p}} \approx 1$ e que $Y^{pp}/Y^{p\bar{p}} \approx 1,754$. Estas razões são apresentadas nos gráficos apresentados na Fig. 4 para cada ajuste, a linha tracejada representa a razão admitindo o modelo de DL, observe que os ajustes possuem valores próximos deste.

Dentro destes ajustes podemos dizer que o modelo de DL é um bom ajuste admitindo energias acima de 10 GeV, pois a partir desta energia temos que a razão entre os parâmetros dos ajustes mais se aproxima do valor obtido pelo modelo tratado.

Referências

- [1] G. N. Watson, “The Diffraction of Electric Waves by the Earth”, *Proc. Roy. Soc. London* **95**, 83 (1918).
- [2] A. Sommerfeld, “Partial Differential Equations in Physics” (Academic Press, New York, 1949). Chap. VI, Appendix, “Radio Waves on the Spherical Earth”.
- [3] M. J. Menon, “Introduction to Soft Diffraction: Some Results and Open Problems”, curso ministrado na LISHEP 2002 - Session B - Advanced School on High Energy Physics, UERJ, Rio de Janeiro.
- [4] V. Barone, E. Predazzi, “High-Energy Particle Diffraction” (Spring-Verlag, Berlin, 2002).
- [5] A. Donnachie, P. V. Landshoff, *Phys. Lett. B* **296**, 227 (1992).
- [6] R. V. Churchill, “Variáveis Complexas e suas Aplicações” (USP, McGraw-Hill, 1975).
- [7] C. Tanoudji, B. Diu, F. Lalo, “Quantum Mechanics” (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991).
- [8] D. J. Griffiths, “Introduction to Elementary Particles” (John Wiley, New York, 1987).
- [9] J. H. Vuolo, “Fundamentos da Teoria dos Erros”, 2ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.