DERIVAÇÃO GENERALIZADA E APLICAÇÕES

Ana Cândida Martins do Nascimento
bolsista PIBIC/CNPq
a070080@ime.unicamp.br

Pedro José Catuogno
Orientador
pedrojc@ime.unicamp.br

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC, UNICAMP

palavras-chave: Derivada, Integral de Riemann-Stieltjes, Polinômio de Taylor

Resumo

Inicialmente foi feito um estudo sobre o conceito de derivada de uma função em relação a outra função: definições, teoremas, proposições e as devidas interpretações sobre o tema. Este conceito generaliza o conceito usual de diferenciabilidade, dado que este é um caso particular do objeto de estudo deste projeto, pois é a derivada de uma função em relação à função $g(x) = x$. Feito este estudo, obtiveram-se as ferramentas necessárias para a segunda etapa, que consistiu na pesquisa de aplicações deste conceito generalizado de derivada em tópicos relacionados ao conceito usual; em particular foi desenvolvida uma generalização do polinômio de Taylor de grau 2, e que pode ser estendida para um grau n arbitrário.

Sejam $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{\mathrm{I}}$, f e g funções reais definidas em I. Suponhamos g ser estritamente crescente em I e existirem os limites laterais $f(x_0 - 0)$ e $f(x_0 + 0)$ (note que f não é necessariamente contínua em x_0). Então são feitas as seguintes definições:

Definição 1. *se x_0 é um ponto de continuidade de g, define-se a derivada esquerda de f em relação a g por:*

$$f_g^{'e}(x_0) := \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0+0)}{g(x) - g(x_0+0)} \tag{1}$$

e a derivada direita de f em relação a g por:

$$f_g^{'d}(x_0) := \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0-0)}{g(x) - g(x_0-0)} \ . \tag{2}$$

Senão, se x_0 é um ponto de descontinuidade de g, tais derivadas são definidas, respectivamente, por:

$$f_g^{'e}(x_0) := \frac{f(x_0-0) - f(x_0+0)}{g(x_0-0) - g(x_0+0)} \tag{3}$$

e

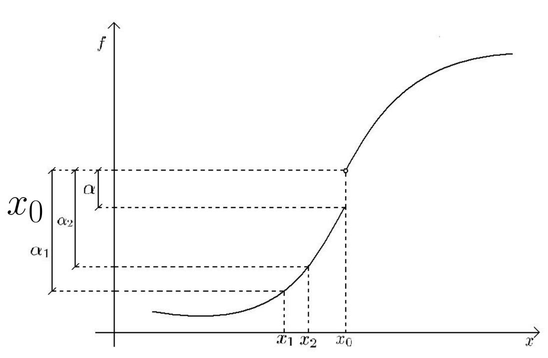
$$f_g^{'d}(x_0) := \frac{f(x_0+0) - f(x_0-0)}{g(x_0+0) - g(x_0-0)} \ . \tag{4}$$

Diz-se que f é derivável à esquerda em relação a g em x_0 se $f_g^{'e}(x_0)$ assumir um valor finito. O mesmo conceito se estende para a derivada direita.

Observação 1. Tendo em mente a ideia intuitiva da derivada lateral tradicional, esta também mede a variação da função f, porém com uma "unidade" de variação arbitrária, dada pela função g (aspas porque esta unidade depende do ponto x_0 em que g está sendo avaliada).

Observação 2. No caso da derivada esquerda, faz sentido considerar a diferença $f(x) - f(x_0+0)$ pois $f(x)$ é avaliada em pontos à esquerda de x_0 e arbitrariamente próximos deste, e $f(x_0+0)$ fornece o comportamento de f imediatamente após x_0, dado que x está crescendo. Então, $f(x) - f(x_0+0)$ tende para a variação de f em x_0, considerando apenas valores à esquerda de x_0.

Exemplo 1.
$-\alpha_1 = f(x_1) - f(x_0+0)$
$-\alpha_2 = f(x_2) - f(x_0+0)$
$\{-\alpha_k\} \to -\alpha =$
= limite da variação de f em torno de x_0 dado que x se aproxima de x_0 pela esquerda.



Portanto, quando esta diferença é dividida pela variação de g em torno de x_0, $g(x) - g(x_0)$, e é tomado o limite esquerdo deste quociente, obtém-se a variação esquerda de f em x_0 em relação à variação esquerda de g em x_0. Considerações análogas podem ser feitas para a derivada direita.

Observação 3. $g_g^{'e}$ e $g_g^{'d}$ existem e $g_g^{'e} = g_g^{'d} = 1, \forall\, x_0 \in \mathring{\mathrm{I}}$.

Definição 2. *Se x_0 é um ponto de continuidade de g, define-se a derivada de f em relação a g por:*

$$f_g^{'}(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - l_0}{g(x) - g(x_0)} \tag{5}$$

se existir o limite $l_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Senão, se x_0 for um ponto de descontinuidade de g, esta derivada é definida por:

$$f_g^{'}(x_0) := \frac{f(x_0+0) - f(x_0-0)}{g(x_0+0) - g(x_0-0)} \ . \tag{6}$$

Quando $f_g^{'}(x_0)$ assume um valor finito, diz-que que f é derivável em relação a g em x_0. Também é dito que f é derivável em relação a g em I se f for derivável em relação a g em cada ponto de I.

Observação 4. $f_g^{'e} = f_g^{'d} = f_g^{'}$ em cada ponto de descontinuidade de g.

Observação 5. Como no conceito usual de derivada, f é derivável em relação a g em x_0 se e só se existirem $f_g^{'e}(x_0)$ e $f_g^{'d}(x_0)$ e estes valores forem iguais.

Observação 6. Se $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe e x_0 é um ponto de descontinuidade de g, então $f_g^{'}(x_0) = 0$, o que é razoável, já que a função g dá um salto em x_0 e a função f não (f pode, no máximo, apresentar uma descontinuidade em x_0, mas deve ter um comportamento "suave"em torno deste). Portanto, a variação aproximada de f em x_0 pode ser arbitrariamente menor que a de g, bastando para isso tomar x suficientemente próximo de x_0. Logo, no limite, a variação de f em relação a g em x_0 é zero.

A seguir são enunciados alguns teoremas de funções deriváveis de acordo com as definições anteriores, análogos a outros teoremas ligados ao conceito usual de diferenciabilidade. As demonstrações podem ser encontradas em [1].

Teorema 1 (Fermat)**.** *Sejam $f, \ g \ : \ \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas em $x_0 \ \in \ \mathring{\mathrm{I}}$, x_0 ponto de extremo de f. Se f é derivável em relação a g em x_0, então $f_g^{'}(x_0) = 0$.*

Teorema 2 (Rolle)**.** *Sejam $f, \ g$: [a, b] $\to \mathbb{R}$, g estritamente crescente. Se f é uma função contínua em* [a, b]*, derivável em relação a g em* (a, b) *e $f(a) = f(b)$, então existe* c $\in$ (a, b) *tal que $f_g^{'}(c) = 0$.*

Teorema 3 (Cauchy)**.** *Sejam $f, \ g, \ h$:* [a, b] $\to \mathbb{R}$ *e suponha que g é estritamente crescente. Se f, g e h são funções contínuas em* [a, b]*, f e h deriváveis em relação a g em* (a, b) *e $h_g^{'}(x) \neq 0 \ \forall \ x \in$* (a, b)*, então $h(a) \neq h(b)$ e existe $c \ \in$* (a, b) *tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{h(b) - h(a)} = \frac{f_g^{'}(c)}{h_g^{'}(c)} \ .$$

Teorema 4 (Lagrange)**.** *Sejam $f, \ g$:* [a, b] $\to \mathbb{R}$ *e suponha g ser estritamente crescente. Se f e g são contínuas em* [a, b] *e f é derivável em relação a g em* (a, b) *então existe $c \ \in$* (a, b) *tal que*

$$f(b) - f(a) = f_g^{'}(c)[g(b) - g(a)] \ .$$

Proposição 1. Seja g : [a, b] $\to \mathbb{R}$ estritamente crescente e assuma que g apresenta um número finito de pontos de descontinuidade.
Seja s : [a, b] $\to \mathbb{R}$ o componente salto de g, isto é,

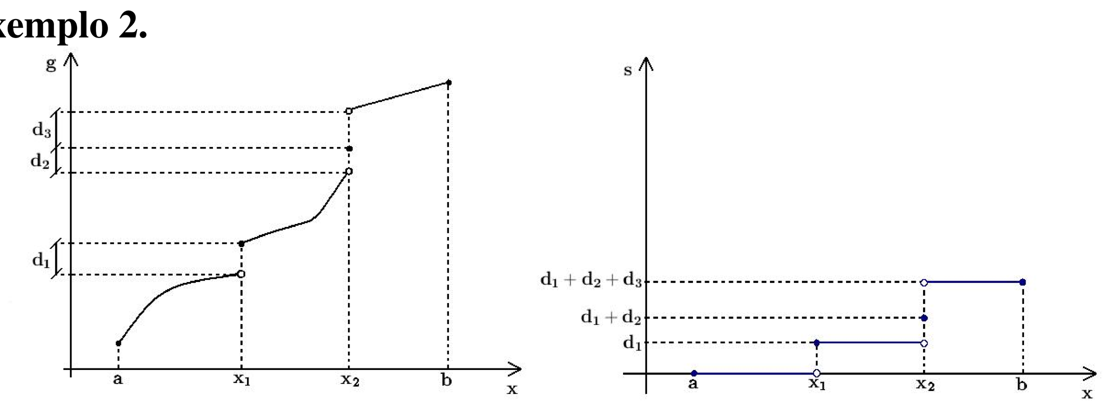
$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = a \\ g(a+0) - g(a) + \sum\limits_{x_k < x} [g(x_k+0) - g(x_k-0)] + \\ \qquad + g(x) - g(x-0) & \text{se } a < x \leq b \end{cases}$$

(observe que $\sum\limits_{x_k<x} [g(x_k+0) - g(x_k-0)]$ é uma soma finita, pois nela só influem os pontos de descontinuidade de g, os quais são finitos por hipótese).
Então s é derivável em relação a g em (a, b) e temos:

$$s_g^{'}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é um ponto de continuidade de } g \\ 1 & \text{se } x \text{ é um ponto de descontinuidade de } g \end{cases}$$

Observação 7. Como o próprio nome já diz, a função s indica os saltos de g. É uma função escada cujos degraus ocorrem nos pontos de descontinuidade de g e é constante nos intervalos em que g é contínua. Logo, é bem razoável que $s_g^{'}$ assuma valor zero nos pontos de continuidade de g e 1 nos pontos de descontinuidade, pois a variação de s nestes pontos será exatamente na mesma proporção que a de g.

Exemplo 2.



Definição 3. $\mathfrak{D}_{[\mathrm{a,b}]} = \{ \ g$: [a, b] $\to \mathbb{R}$ | *g é estritamente crescente e seu componente salto s é derivável em relação a g em* (a, b) } .

Proposição 2. Se $g \ \in \ \mathfrak{D}_{[\mathrm{a,b}]}$, então o componente contínuo de g, $\bar{g}$: [a, b] $\to \mathbb{R}$, $\bar{g}(x) = g(x) - s(x)$ (s é o componente salto de g), é derivável em relação a g em (a, b) e:

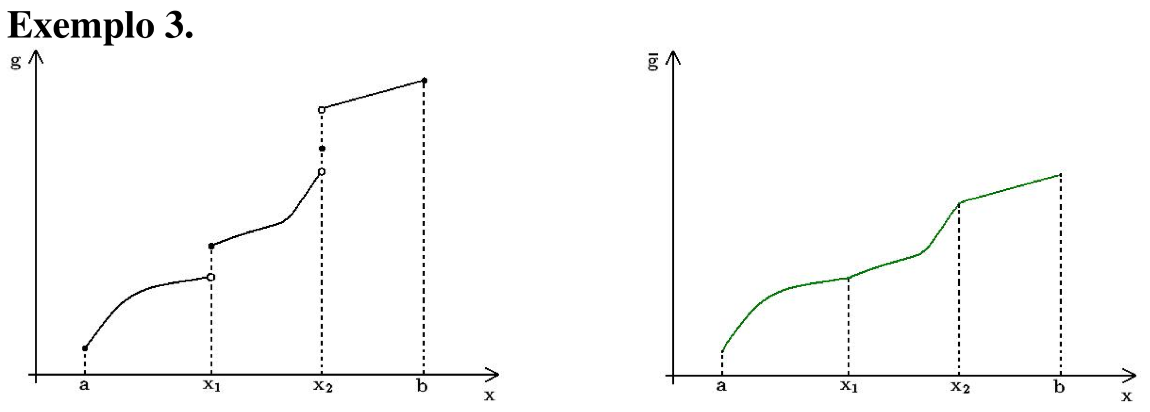
$$\bar{g}_g^{'}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é um ponto de descontinuidade de } g \\ 1 - s_g^{'}(x) & \text{se } x \text{ é um ponto de continuidade de } g \end{cases}$$

Portanto:

$$\bar{g}_g^{'}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } g \text{ não é contínua em } x \\ 1 & \text{se } g \text{ é contínua em } x \end{cases}$$

Observação 8. Uma maneira simples de entender $\bar{g}$ é enxergá-la geometricamente: o gráfico de $\bar{g}$ é o gráfico de g sem saltos, isto é, as partes "soltas"do gráfico de g são unidas para formar o gráfico de $\bar{g}$. A partir do exemplo anterior obtemos o próximo exemplo.

Exemplo 3.



Nos pontos de continuidade de g, $\bar{g}$ varia exatamente na mesma proporção que g; isto é confirmado pelo fato de a derivada de $\bar{g}$ em relação a g ser 1 nestes pontos. Nos pontos de descontinuidade de g, como g dá um "salto"e $\bar{g}$ não, a diferença $\bar{g}(x) - \bar{g}(x_1)$ é, em módulo, arbitrariamente menor que $g(x) - g(x_1)$ (basta tomar x suficientemente próximo de x_1), então o limite do quociente $\dfrac{\bar{g}(x) - \bar{g}(x_1)}{g(x) - g(x_1)}$, o qual fornece a variação de $\bar{g}$ em relação a g no ponto x_1, é zero; de fato, pela proposição acima temos $\bar{g}_g^{'}(x_1) = 0$.

Definição 4. *Sejam f, g : $\mathrm{I} \to \mathbb{R}$ duas funções tais que g é estritamente crescente. Uma primitiva de f em relação a g é qualquer função $F : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ tal que $F_g^{'}(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathrm{I}$.*

Proposição 3. Se f é uma função contínua em [a, b] e se g é uma função estritamente crescente em [a, b], então a função

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dg(t), \ \forall \ x \in [\mathrm{a, b}] \tag{7}$$

é uma primitiva de f em relação a g em [a, b].

Observação 9. Entendemos a integral da equação (7) no sentido da integral de Riemann-Stieltjes.

Observação 10. F é uma função contínua em cada ponto x_0 de continuidade de g.

Teorema 5 (fórmula de Leibniz-Newton)**.** *Assuma que f é uma função Riemann-Stieltjes integrável e possui primitivas em* [a, b] *em relação à função contínua e estritamente crescente g. Se F é uma função contínua em* [a, b] *e uma primitiva de f em relação a g, então:*

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = F(b) - F(a) \ . \tag{8}$$

Teorema 6. *Sejam $f, \ g$:* [a, b] $\to \mathbb{R}$ *duas funções. Assuma que:*

1. *g é uma função crescente e $(\mathrm{a_k})_{\mathrm{k} \geq 1}$ são seus pontos de descontinuidade;*
2. *f é Riemann-Stieltjes integrável em relação a g em* [a, b].

Sejam s e $\bar{g}$ os componentes salto e contínuo de g, respectivamente. Então f é Riemann-Stieltjes integrável em relação a $\bar{g}$ em [a, b] *e*

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x)\, d\bar{g}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f(a_k)(s(a_k+0) - s(a_k-0)) \ . \tag{9}$$

Uma aplicação natural deste conceito de derivada seria a generalização do polinômio de Taylor. Para isso serão necessários dois lemas (as demonstrações serão omitidas):

Lema 1. *Sejam $f, g \ : \ \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ duas funções tais que g é estritamente crescente, f função derivável em relação a g e a constante. Então:*

$$(af)_g^{'}(x) = a[f_g^{'}(x)], \ \forall \ x \in \mathring{\mathrm{I}} \ . \tag{10}$$

Lema 2. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, k constante, $x_0 \in \mathring{\mathrm{I}}$ e x_0 ponto de continuidade de g. Então*

$$[(g(x)+k)^n]_g^{'}(x_0) = n\,[g(x_0)+k]^{n-1} \tag{11}$$

Seja a função $p \ : \ \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $p(x) = f(x_0) + f_g^{'}(x_0)[g(x) - g(x_0)] + \dfrac{f_g^{''}(x_0)}{2}[g(x) - g(x_0)]^2$, $x_0 \in \mathring{\mathrm{I}}$. Suponha g contínua em I. Pelos lemas anteriores, $p_g^{'}(x) = f_g^{'}(x_0) + f_g^{''}(x_0)[g(x) - g(x_0)]$ e $p_g^{''}(x) = f_g^{''}(x_0)$.

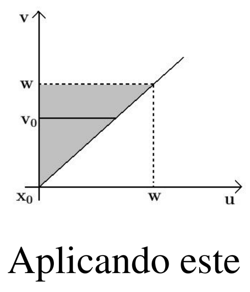
Logo, as derivadas primeira e segunda de p em relação a g no ponto x_0 coincidem com as respectivas derivadas de f em relação a g no ponto x_0. Por essa razão p será chamado Polinômio de Taylor de ordem 2 de f derivada em relação a g no ponto x_0.
Se p for usado para aproximar o valor de f em pontos próximos de x_0, é razoável conhecer um limitante para o erro cometido nesta aproximação. Para isso, considere a função

$$R(x) = \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{w} \int_{x_0}^{v} f_g^{(3)}(u)\, \mathrm{dg}(u)\, \mathrm{dg}(v)\, \mathrm{dg}(w) \ .$$

Por integração direta e usando os lemas 1 e 2 e o teorema 5, obtém-se:

$$R(x) = f(x) - f(x_0) - f_g^{'}(x_0)\Big[g(x) - g(x_0)\Big] - \frac{f_g^{''}(x_0)}{2}\Big[g(x) - g(x_0)\Big]^2 \ .$$

Agora $R(x)$ é calculado mudando-se a ordem de integração. Inicialmente considere (por simplicidade de notação) a integral $\int_{x_0}^{w}\int_{x_0}^{v} f(u)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$. Para cada v fixo, a variável de integração u varia de x_0 a v (ver figura). Integrando em u, obtém-se uma função em v. Então v se torna a variável de integração, que varia entre x_0 e w. Logo, fixando u, v varia entre u e w. Mas como v assume valores entre x_0 e w, se v variar em função de u então u deve variar entre x_0 e w.



Portanto,

$$\int_{x_0}^{w}\int_{x_0}^{v} f(u)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = \int_{x_0}^{w}\int_{u}^{w} f(u)\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u =$$
$$= \int_{x_0}^{w} f(u) \int_{u}^{w} 1\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u = \int_{x_0}^{w} (w-u) f(u)\, \mathrm{d}u$$

Aplicando este raciocínio a $R(x)$ obtém-se

$$R(x) = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f_g^{(3)}(u)\big[g(x) - g(u)\big]^2\, \mathrm{dg}(u)$$

Em [3] encontra-se o seguinte teorema:

Teorema 7. *Se h é real e de variação limitada no intervalo* [a, b] *e g é real e contínua neste intervalo, então*

$$\int_a^b h\, \mathrm{dg} \leq \big(\inf h\big)\big(g(b) - g(a)\big) + S[a,b]V[h] \ ,$$

onde $V[h]$ é a variação total de h e $S[a,b] = \sup_{a \leq \alpha < \beta \leq b} \big(g(\beta) - g(\alpha)\big)$.

Então, se $h(u) = f_g^{(3)}(u)\big[g(x) - g(u)\big]^2$ tiver variação limitada em $[\mathrm{x_0, x}]$, tem-se um limitante superior para $R(x)$.

Referências

[1] Mihai Gradinaru: *On the derivative with respect to a function with applications to Riemann-Stieltjes integral.*

[2] Dimitri Kountourogiannis, Paul Loya: *A derivation of Taylor's formula with integral remainder* (junho 2003).

[3] Richard Darst, Harry Pollard: *An inequality for the Riemann-Stieltjes integral* (1969).

[4] Elon Lages Lima: *Análise real volume 1. Funções de uma variável* - Coleção Matemática Universitária, IMPA (2007).