Análise Não Linear de Sistemas e Suas Aplicações em Engenharia Mecânica

Autores: Conrado S. Miranda (bolsista) e J. F. Camino (orientador)

Faculdade de Engenharia Mecânica - FEM

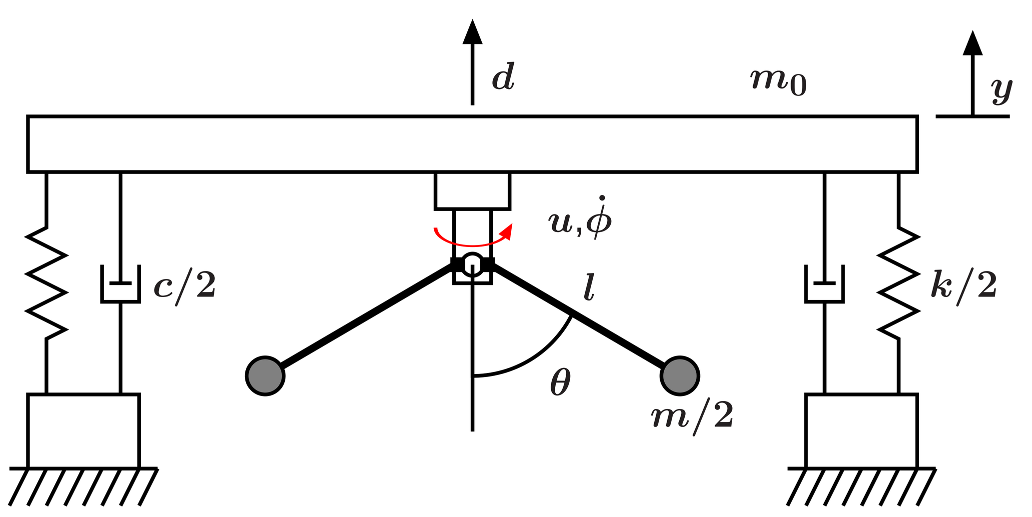
Palavras Chaves: Sistemas não lineares - Região de atração - Função de Lyapunov -Absorvedor de vibração

Resumo

Em geral, sistemas mecânicos são modelados e analisados como sistemas lineares. No entanto, esta hipótese é apropriada apenas para algumas aplicações e em determinadas condições de operação. Assim, se não for feita uma análise adequada do sistema não linear, seus componentes poderão ser projetados de uma forma não ideal, o que pode resultar num desempenho inapropriado durante o funcionamento. Este trabalho tem por objetivo estudar as técnicas de análise de sistemas não lineares usando métodos baseados em funções de Lyapunov descritos em [Kha96]. As técnicas estudadas foram aplicadas num absorvedor rotacional ativo de vibração apresentado em [Wu09]. As técnicas clássicas utilizadas para se determinar a região de atração são aplicadas em um pêndulo simples cujo plano de fase pode ser facilmente visualizado. O pacote computacional SOSTOOLS [PPSP06] do MatLab pode ser utilizado para encontrar funções de Lyapunov para sistemas polinomiais, sendo sua metodologia e um exemplo apresentados.

Absorvedor de Vibração

- O absorvedor é composto por um pêndulo rotacional ligado a um motor acoplado a uma base móvel, sustentada por molas e amortecedores.



- Condição nominal de operação com $d = \sin \omega t$

$$\dot{\phi}_r = \pm\sqrt{\frac{\omega^2+\sqrt{\omega^4+4\left(\frac{g}{l}\right)^2}}{2}}$$
$$\theta_r = \cos^{-1}\left(\frac{\left(\frac{g}{l}\right)}{\dot{\phi}_r^2}\right)$$

- Modelo no espaço de estado com $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \left\{y, \theta-\theta_r, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\phi}-\dot{\phi}_r\right\}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \dfrac{m\sin^2(x_2+\theta_r)\left(g - l(x_5+\dot{\phi}_r)^2\cos(x_2+\theta_r)\right) - mlx_4^2\cos(x_2+\theta_r) - kx_1 - cx_3 + d}{m\cos^2(x_2+\theta_r)+m_0} \\ \dot{x}_4 = \sin(x_2+\theta_r)\left(\dfrac{kx_1 + cx_3 - g\,(m+m_0) + l\cos(x_2+\theta_r)\left((x_5+\dot{\phi}_r)^2\,(m+m_0) + x_4^2 m\right) - d}{l\,(m\cos^2(x_2+\theta_r)+m_0)}\right) \\ \dot{x}_5 = \dfrac{-k_p x_5}{ml^2\sin^2(x_2+\theta_r)} - 2(x_5+\dot{\phi}_r)x_4\cot(x_2+\theta_r) \end{cases}$$

- Função de Lyapunov que prova estabilidade da origem. utilizando o teorema da invariância de LaSalle é

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2}\left(\left\{\begin{matrix} x_4 & x_3 \end{matrix}\right\}\begin{bmatrix} ml^2 & ml\sin\theta_r \\ ml\sin\theta_r & m+m_0 \end{bmatrix}\left\{\begin{matrix} x_4 \\ x_3 \end{matrix}\right\} + ml^2\sin^2(\theta_r)\,x_5^2 + ml^2\dot{\phi}_r^2\sin^2(\theta_r)\,x_2^2 + kx_1^2\right) \\ &> 0, \quad \forall x \neq 0 \\ \dot{V}(x) &= -k_p x_5^2 - cx_3^2 \\ &\leq 0, \quad \forall x \end{aligned}$$

- Estabilidade assintótica foi determinada utilizando o teorema da invariância de LaSalle.

Região de Atração

- Região de atração é composta pelo conjunto das condições iniciais tais que o sistema é assintoticamente estável.
- Pode ser estimada por

$$\Omega_c = \{x \in R^n \mid V(x) \leq c \text{ e } \dot{V}(x) \leq 0\}$$

- Expande-se a estimativa da região de atração através da integração reversa dos pontos em sua fronteira por um intervalo de tempo, ou seja, as soluções de

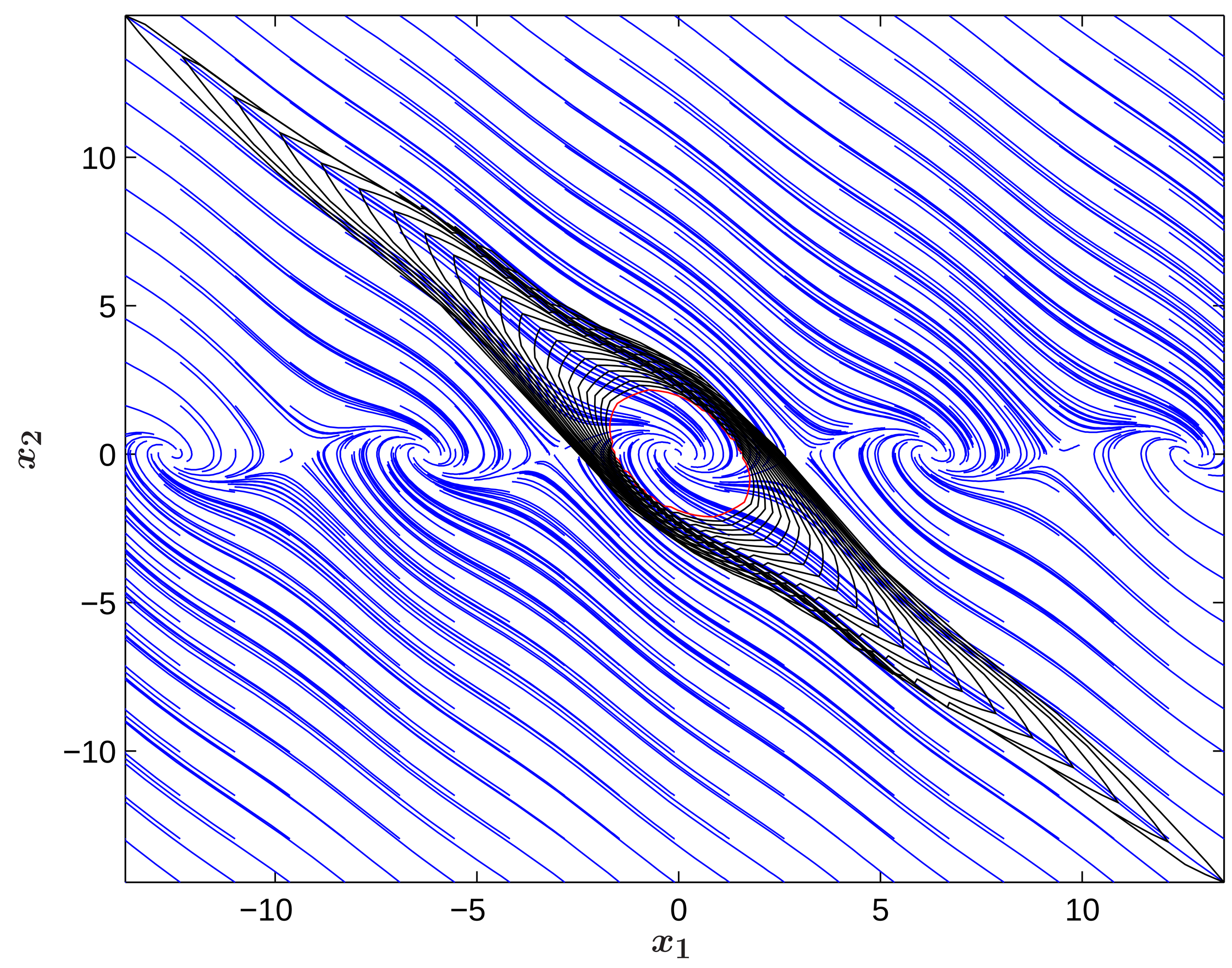
$$\dot{x} = -f(x), \quad t \in [0, T]$$

para x_0 na fronteira da região de atração estabelecem uma nova fronteira para a mesma.

- Exemplo: pêndulo simples

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - \sin x_1 \end{cases}$$

Primeira estimativa da região de atração em vermelho e suas sucessivas expansões em preto. Curvas de soluções do sistema são mostradas em azul.



Determinação de uma função de Lyapunov

- Uma função de Lyapunov pode ser escrita no formato

$$V(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i g_i^2(x)$$

- Uma função de Lyapunov que prova a estabilidade de um sistema deve satisfazer as seguintes inequações

$$V(x) - \|x\| \geq 0$$
$$-\frac{\partial V}{\partial x} f(x) \geq 0$$

- Utilizando o SOSTOOLS, pode-se achar constantes α_i em $V(x)$ que satisfazem as inequações, contanto que $g_i(x)$ e $f(x)$ sejam polinômios. Para utilizá-lo em sistemas com funções trigonométricos, pode-se fazer a expansão por série de Taylor das referidas funções.
- Considerando o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -\tan x_1 \end{cases}$$

faz-se uma expansão em série de Taylor da função $\tan x_1$ com expoente máximo igual a 70.

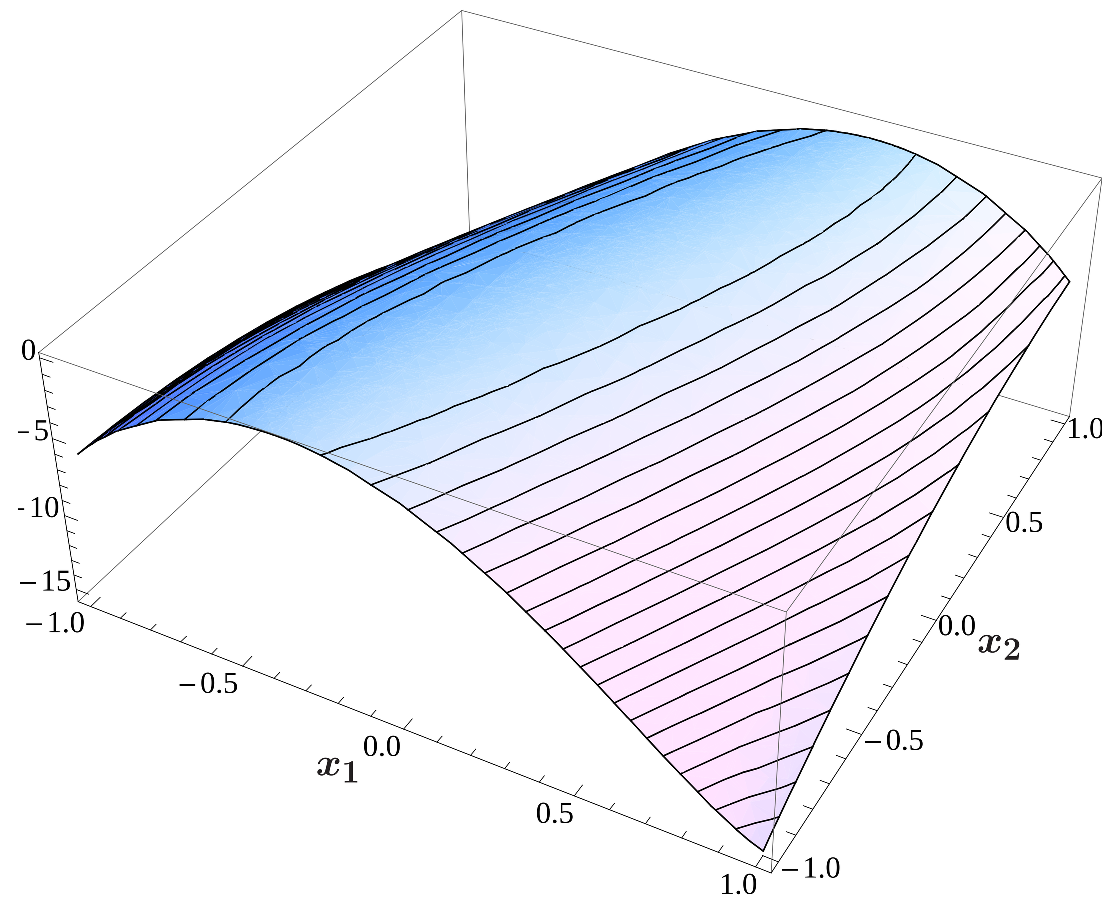
- Utilizando o sistema com a tangente aproximada como acima, pede-se para achar $V(x)$ com

$$V(x) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_1 x_2 + \alpha_3 x_2^2$$

O pacote computacional calcula α_i e retorna a função de Lyapunov

$$V(x) = 6x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$$
$$\dot{V}(x) = -12x_1^2 + 14x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_1\tan x_1 - 6x_2\tan x_1$$

que prova a estabilidade do sistema com o gráfico de $\dot{V}(x)$ mostrado abaixo.



Referências

[Kha96] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ 07632, USA, 1996.

[PPSP06] S. Prajna, A. Papachristodoulou, P. Seiler, and P. A. Parrilo. Sostools user's guide. 64, 2006.

[Wu09] S.T. Wu. Active pendulum vibration absorbers with a spinning support. *Journal of Sound and Vibration*, 323:1–16, 2009.