RECONSTRUÇÃO DE SINAIS COM INFORMAÇÃO INCOMPLETA

Aluno: Ivan Xavier Moura do Nascimento (i071212@dac.unicamp.br)

Orientador: Lúcio Tunes dos Santos (lucio@ime.unicamp.br)

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica

Palavras – chave: Reconstrução – Processamento - Sinais - Shannon – Nyquist - Candès

Introdução

O tratamento de sinais é tema de extrema importância no mundo tecnológico atual. Em geral naturalmente analógicos, os sinais devem ser convertidos em sinais digitais para que possam ser processados em um computador. E por diversas vezes é necessário reconstruí-los a partir de uma amostra incompleta de seus coeficientes de Fourier. Uma pergunta que surge naturalmente é a seguinte: é possível obter condições sob as quais o sinal pode ser reconstruído perfeitamente, ainda que algumas de suas informações tenham sido perdidas por algum motivo? O embasamento teórico necessário para responder a esta pergunta foi o objetivo deste projeto.

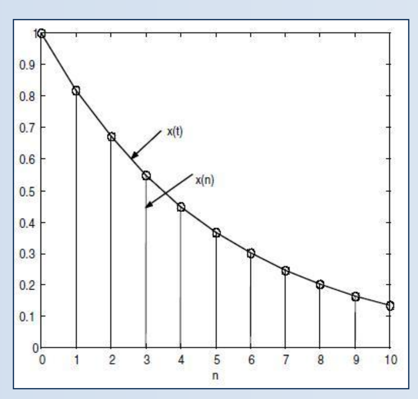
Análise de Fourier

Uma das principais áreas da matemática sobre a qual o argumento teórico da reconstrução de sinais se apóia é a Análise de Fourier. Trata-se do estudo de como funções definidas em um contínuo (isto é, em todos os pontos de um intervalo) podem ser representadas e analisadas em termos de funções periódicas como senos e cossenos. Foram conceitos muito importantes para o desenvolvimento deste trabalho os de Séries e Transformadas de Fourier (Discreta, Contínua e Inversa).

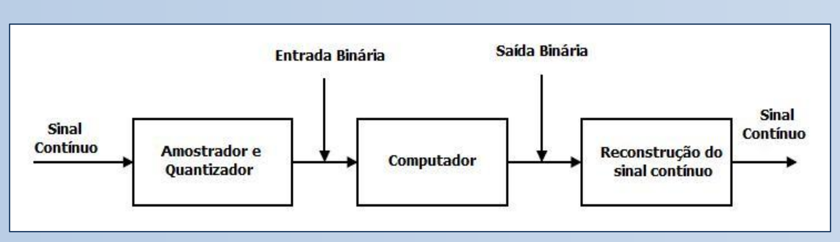
Sinais

Sinais podem ser contínuos ou discretos. Neste trabalho, o foco está nos sinais unidimensionais, em geral nos discretos. Estes são definidos apenas em instâncias discretas de tempo. Podem ser amostras de um sinal contínuo ou podem existir naturalmente. Um exemplo de uma amostra discreta de um sinal contínuo pode ser visto na figura à direita.

Ao processo de redução de um sinal contínuo em sinal discreto dá-se o nome de amostragem. Tal conversão se justifica pelo fato de um sinal digital poder ser manipulado por computadores e submetido a diversas operações.



Um sinal contínuo x(t) e sua amostra $x_n = x(n)$.



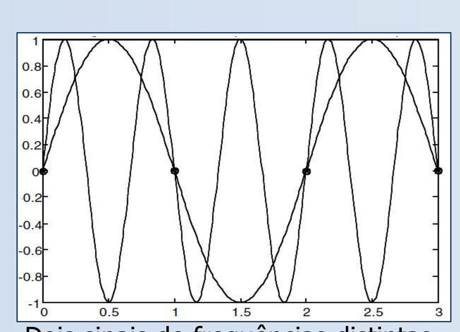
Sistema Misto.

Em algum momento, pode se fazer necessária também a reconstrução do sinal digital já processado pelo computador, a fim de gerar um sinal analógico de volta. Todo esse processo é ilustrado ao lado.

Reconstrução de Sinais

Seja x(t) um sinal analógico a ser amostrado a uma taxa de f_s em intervalos regulares de duração T_s. Então, x_n será o resultado de tal amostragem, sendo $x_n = x(nT_s)$, n um inteiro. Para responder à pergunta anterior, precisamos ver o que acontece nos domínios temporal e de freqüência quando se amostra um sinal.

Ambiguidade no domínio temporal. É facilmente visto que se tivermos um sinal periódico com frequência f, e outro sinal periódico com frequência $f + (m/n)f_s$, m inteiro, ambos amostrados a uma freqüência f_s, as amostras desses dois sinais serão iguais. A figura ao lado ilustra esse fenômeno.


Dois sinais de frequências distintas com amostras iguais.

Dado x_n, seria impossível, portanto, saber a qual dos sinais x_n ele se referiria sem informações adicionais. O termo em inglês *aliasing* é amplamente usado na denominação deste fenômeno. Para evitar tal problema, seria necessário que a frequência de amostragem fosse maior. Mas quão maior?

Teorema da Amostragem de Nyquist-Shanon

Seja f uma função de banda limitada, isto é, a transformada de Fourier de f é zero fora do intervalo [−B,B]. Se o período amostral $T_s \leq (1/2B)$, então f pode ser exatamente reconstruída a partir de suas amostras $f_n = f(nT_s) = f(t_n)$ por

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \, sinc\left[\frac{(x - x_n)}{\Delta x}\right],$$

onde sinc é a função Seno Cardinal, definida por

$$sinc(t) = \begin{cases} \dfrac{sen(\pi t)}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

O teorema diz que, em teoria, é possível reconstruir uma função precisamente a partir de suas amostras desde que a função seja de banda limitada e que seja amostrada com uma frequência capaz de "cobrir" as mais altas frequências de f. O teorema também fala para selecionarmos uma malha temporal suficientemente pequena Ts, uma vez que se conheça o limite de banda B. É dito que T_s deve ser escolhido a satisfazer a condição $T_s \leq (1/2B)$. A taxa crítica de amostragem $T_s = (1/2B)$ é chamada de Taxa de Amostragem de Nyquist e a frequência B é conhecida como Frequência de Nyquist.

Substituição da Informação Perdida

Através do teorema de Shannon, vimos sob que condições podemos reconstruir uma função f(t) a partir de suas amostras. O que acontece, porém, se alguns valores f(n) forem perdidos de alguma forma? Ainda assim é possível recuperar exatamente f(t)?

Surpreendentemente, a resposta ainda é sim! Existem algumas condições sob as quais a função pode ser precisamente recuperada ainda que se tenham perdido alguns pontos de sua amostra. Vejamos a formulação do problema:

Considere um sinal f amostrado discretamente $f|_T = \{ f_j \mid j \in T\}$, onde T = {0,1,...,N-1} e seja $\{F_k \mid k \in T\}$ sua a transformada de Fourier. O problema é recuperar as amostras f_j a partir de uma amostra incompleta das transformadas, $F|_\Omega = \{F_k \mid k \in \Omega\}$, com Ω C T.

Num trabalho recente, Candès et al. (2006) mostram que é possível recuperar o sinal f *exatamente* a partir das observações $F|_\Omega$, desde que $f|_T$ seja suficientemente esparso. Mais do que isso, tal trabalho indica quão esparso deve ser: é necessário que N seja um número primo e que o número de elementos não nulos em $f|_T$ seja menor ou igual a metade do número de elementos em Ω. A prova de tal resultado está além do escopo deste trabalho de iniciação científica.

A recuperação consiste na resolução de um problema de otimização, que encontra a solução g com o maior número possível de componentes nulas, a de mínima complexidade (Problema I).

$$\begin{aligned} &Minimizar \sum_{k=0}^{N-1} sinal(|g_k|) \\ &s.a. \qquad G_k = F_k, \qquad k \in \Omega, \end{aligned}$$

Problema I

Infelizmente, tal problema é essencialmente combinatório e sua resolução é computacionalmente muito cara. Os autores então mostram que numa enorme porcentagem de casos, dependendo do número de elementos de Ω e T, o problema é equivalente ao Problema II, onde consideramos $g_N = g_0$.

$$\begin{aligned} &Minimizar \sum_{k=0}^{N-1} |g_{k+1} - g_k| \\ &s.a. \qquad G_k = F_k, \qquad k \in \Omega, \end{aligned}$$

Problema II

Da definição da Transformada de Fourier Discreta, as equações $G_k = F_k$ podem ser reescritas como Ag = b, onde A é uma matriz complexa com número de linhas igual ao número de elementos em Ω e número de colunas igual a N, e b é o vetor das amostras de Fourier conhecidas, isto é, F_k, com $k \in \Omega$.

Como se pode notar, a formulação anterior não é linear devido ao módulo presente na função objetivo, uma vez que as restrições são lineares. Entretanto, é possível transformá-la em outra linear com artifícios simples de Programação Linear. Com a mudança $h_k = g_{k+1} - g_k$, onde h_k é escrita como a diferença entre duas novas variáveis não-negativas h_k^+ e h_k^-, o problema com o módulo presente na função objetivo pode ser evitado, pois $|h_k| = h_k^+ + h_k^-$ (Problema III).

$$\begin{aligned} &Minimizar \sum_{k=0}^{N-1} h_k^+ + h_k^- \\ &s.a. \qquad B\begin{bmatrix} h^+ \\ h^- \end{bmatrix} = b, \\ &\qquad\qquad h^+, h^- \geq 0 \end{aligned}$$

Problema III

Conclusão

O resultado apresentado no trabalho surpreende pela simplicidade da solução apresentada. A conversão de um Problema Não-Linear em um Problema Linear, por exemplo, é o que se busca sempre, devido à gama de métodos numéricos e algoritmos de resolução à nossa disposição atualmente.

O projeto também possibilitou uma interligação entre teorias clássicas já bem difundidas e aceitas e *papers* recentemente publicados. Toda a preparação teórica necessária para iniciar experimentos práticos foi desenvolvida. A partir deste ponto, poderão ser desenvolvidas as implementações computacionais e análise de dados.

Referências Bibliográficas

E. Candès & T. Tao, Decoding by Linear Programming, Technical Report, Caltech / University of California, 2004.

E. Candès, J. Romberg & T. Tao, *Robust Uncertainty Principles: Exact Signal Reconstruction from Highly Incomplete Frequency Information, IEEE Transactions on Information Theory*, 52, 489–509, 2006.

E. Candès, J. Romberg & T. Tao, *Stable Signal Recovery from Incomplete and Inaccurate Measurements*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 59, 1207–1223, 2006.