Curvatura e nós

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Jordan L Silva
jordansilva2008@gmail.com
Orientando

Carlos E Durán
cduran@ime.unicamp.br
Orientador

Apoio: PIBIC/CNPq

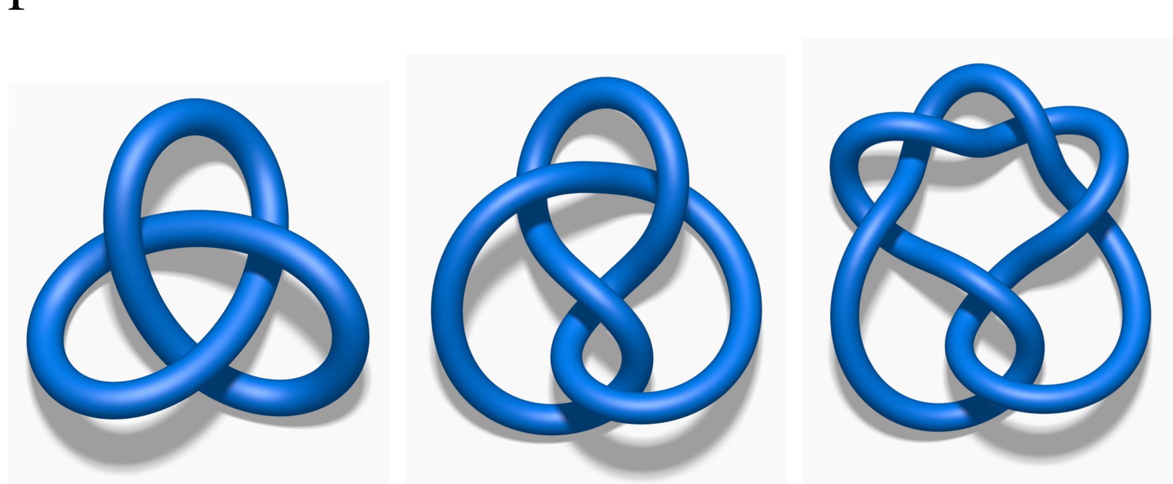
Teorema de Fáry-Milnor – Grupo Fundamental – Teorema de Seifert-vanKampen

Introdução

O presente projeto consiste em estudar diversas técnicas de Geometria e Topologia utilizadas na Teoria de Nós. Num primeiro momento, foi feito um estudo geométrico desta teoria, utilizado o Teorema de Fáry-Milnor. O interesse de tal teorema reside na característica global de seu resultado, fato pouco comum em geometria. Em seguida, viu-se que utilizando o conceito de Grupo fundamental, proveniente da Topologia Algébrica, podemos construir um invariente simples de ser calculado, cuja dificuldade está em comparar se dois nós são ou não equivalentes.

Conceitos iniciais sobre nós

Chamamos de nó a imagem de curva em R^3, de tal modo que a curva é fechada e simples.



Temos uma maneira natural de se estabelecer um equivalência entre dois nós: basta tomar um deles e tentar deformá-lo para obter o outro, como se ambos fossem duas tiras de borracha.

Definição 1. *Dados dois nós $\alpha_1, \alpha_2 : [0,1] \to R^3$, estes são* equivalentes *se, e somente se, existir uma isotopia $H : R^3 \times [0,1] \to R^3$ tal que $h_0 = id$ e $h_1 = h$ onde h é um homeomorfismo de R^3 em R^3 com $h(\alpha_1) = \alpha_2$.*

Se um nó é equivalente à uma circunferência, este nó é dito *trivial* ou *não anudado*.

O teorema de Fáry-Milnor

Dada uma curva $\alpha : [0,1] \to R^3$ regular parametrizada pelo comprimento de arco, definimos a *curvatura* de α em $s \in [0,l]$ como $\kappa(s) = |\alpha''(s)|$.

Definição 2. *Seja $\alpha : [0,1] \to R^3$ uma curva parametrizada regular no espaço euclidiano.* A curvatura total *de α é dada por*

$$K(\alpha) = \int_0^1 \kappa(t)dt$$

Teorema 1 (Fáry-Milnor). *Seja $\alpha : [0,1] \to R^3$ um nó não-trivial no espaço euclidiano R^3. Então, temos que:*

$$K(\alpha) > 4\pi$$

A demonstração deste fato foi dado pela primeira vez por Milnor, utilizando um método de aproximação dos nós por curvas poligonais.

O Grupo Fundamental de um nó

O *grupo fundamental $\pi_1(X,p)$ de um espaço X com ponto básico $p \in X$* é um grupo definido como o conjunto das classes de equivalência por homotopia de todos os laços com ponto inicial e final em p, com operação induzida pela concatenação de caminhos.

Definição 3. *Seja α um nó em R^3. O grupo fudamental de α é o grupo fundamental de seu complementar $R^3 - \alpha$.*

Buscamos calcular o grupo fundamental de um nó. Assim, encontramos uma aplicação direta do teorema de Seifert-vanKampen.

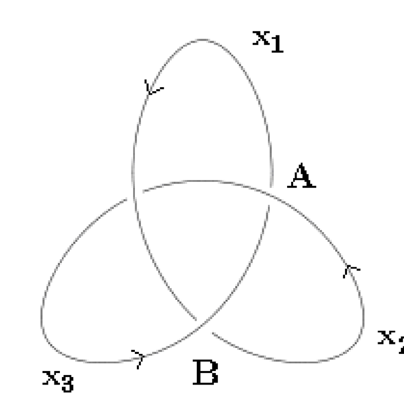
Teorema 2 (Seifert-vanKampen). *Seja X um espaço topológico e $U, V \subset X$ conexos por caminhos com $U \cap V$ não vazio e conexo por caminhos. O grupo fundamental de $U \cup V$ no ponto base $p \in U \cap V$ é obtido do produto livre gerado $\pi_1(U,p) * \pi_1(V,p)$ adicionando-se as relações $i^U_\#(a) = i^V_\#(a)$ para todo $a \in \pi_1(U \cap V, p)$, onde i^U e i^V são as inclusões de $U \cap V$ em U e V, respectivamente.*

Dado α um nó que é equivalente à um nó poligonal, respresentamos seu grupo fundamental em termos de geradores e relações obtidos pelos cruzamentos numa projeção deste nó.

Vejamos exemplos de cálculo do grupo fundamental de nós.

Nó trivial. Seu grupo fundamental tem apenas um gerador e não possui relações, portanto, o nó trivial tem grupo fundamental cíclico infinito Z.

Trifólio. Considere o trifólio da figura dada. Seu grupo fundamental é:



$$G = \langle u, v \mid uvu = vuv \rangle$$

Note que o grupo de permutações P_3 é isomorfo ao grupo fundamental G. Logo, o trifólio não pode ser equivalente ao nó trivial, pois G não é abeliano.

Conclusão

O estudo de teoria de nós nos leva a procurarmos métodos de se avaliar a equivalência entre nós. Assim, apesar de o grupo fundamental de um nó não ser muito eficiente quando queremos mostrar equivalência entre dois nós, ele é aplicação prática do teorema de Seifert-vanKampen. Além disso, o teorema de Fáry-Milnor nos contempla com uma característica geometrica global de um nó.

Referências

J. W. Milnor, *On the total curvature of knots.* Ann. of Math. 2 (1950), 248-257.

E. L. Lima, *Grupo fundamental e espaços de recobrimento.* Projeto Euclides, IMPA, 2006.

M. A. Armstrong, *Basic topology.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York - Berlin, 1983.