

## Introdução

Este trabalho visa uma introdução à teoria de sistemas dinâmicos não lineares tanto por meio de simulações digitais como por meio de simulações analógicas.

Estes diferentes paradigmas computacionais têm suas vantagens e desvantagens. Se por um lado o ambiente de simulação digital oferece uma maior precisão na representação dos parâmetros do modelo e facilidade de implementação, por outro ele pode apresentar tempos de simulações elevados e erros de representação numéricas que podem ser significativos em alguns casos, por exemplo, dentro do contexto de simulações de sistemas caóticos. Já a computação analógica oferece a possibilidade de um ambiente de cálculo em tempo real e sem discretizações por meio de circuitos integradores cujo tempo próprio de operação pode ser definido (escalado) pelo usuário de modo a construir um sistema arbitrariamente rápido. Entretanto, a construção de circuitos eletrônicos com este propósito apresenta uma maior dificuldade de implementação, pois exige maior familiaridade com as técnicas e instrumentação necessárias, bem como apresenta maior imprecisão na representação dos parâmetros do modelo.

A fim de ganhar familiaridade com ambos os paradigmas computacionais este trabalho se propõe a apresentar um conjunto de simulações digitais e analógicas do oscilador Duffing operando em ciclo limite e em caos, o que implica em obter um circuito eletrônico capaz de resolver as equações de estado.

## Metodologia

O oscilador Duffing é dado pelas seguintes equações de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -y + x - x^3 + F_0 \cos(t)\end{aligned}$$

A construção de um circuito analógico para resolver o sistema dinâmico acima requer basicamente um elemento capaz de produzir a não linearidade cúbica, o que foi feita aqui por meio de dois multiplicadores analógicos MPY634 e dois integradores (um amplificador operacional com um capacitor na malha de realimentação) para a obtenção das variáveis  $x$  e  $y$  a partir das suas derivadas. A adaptação do sistema original para a implementação analógica requer um escalamento das variáveis de estado na forma:

$$|x_{max}| = 1.5; |y_{max}| = 0.8$$

Este escalamento aparece no novo sistema de equação por meio da substituição  $u = 4x$  e  $v = 8y$ . Além disso, deve-se levar em consideração que o multiplicador analógico introduz um fator de divisão por 10 a cada multiplicação e ainda é desejável que o coeficiente do termo  $u^3/100$  seja unitário, o que fornece o seguinte sistema dinâmico equivalente:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{1}{25}v, \\ \dot{v} &= -\frac{2}{25}v + \frac{4}{25}u - \frac{u^3}{100} + \frac{80}{125}F_0 \cos\left(\frac{2}{25}t\right)\end{aligned}$$

O sistema dinâmico acima pode ser implementado por meio do circuito mostrado na Figura 1, considerando a frequência de excitação como  $f = 2.7$  kHz.

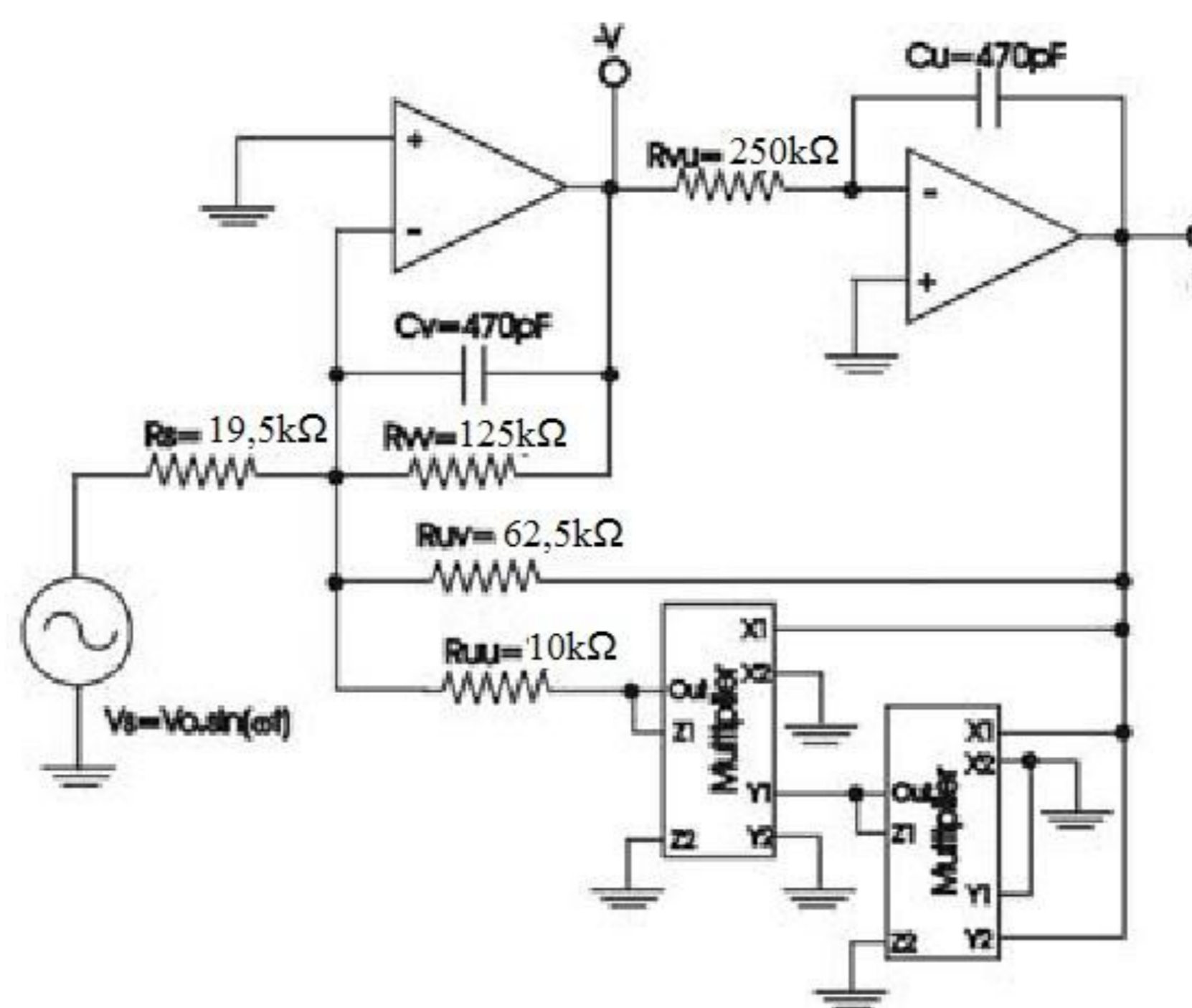


Figura 1: Circuito para simulação analógica do oscilador Duffing.

## Resultados

Observa-se na Figura 2 que dependendo da amplitude da excitação  $F_0$  o sistema pode apresentar comportamentos oscilatórios distintos. No primeiro caso, quando  $F_0 = 1.02$  observa-se uma oscilação periódica (coluna a esquerda) que se torna caótica quando  $F_0 = 1.25$  (coluna a direita). Observa-se também boa concordância entre os comportamentos obtidos via os diferentes paradigmas computacionais tanto no plano de fase como na amplitude do espectro de frequência. Neste último caso, nota-se uma das principais características dos sinais caóticos que é o largo espectro em frequência associado com a aperiodicidade da série temporal.

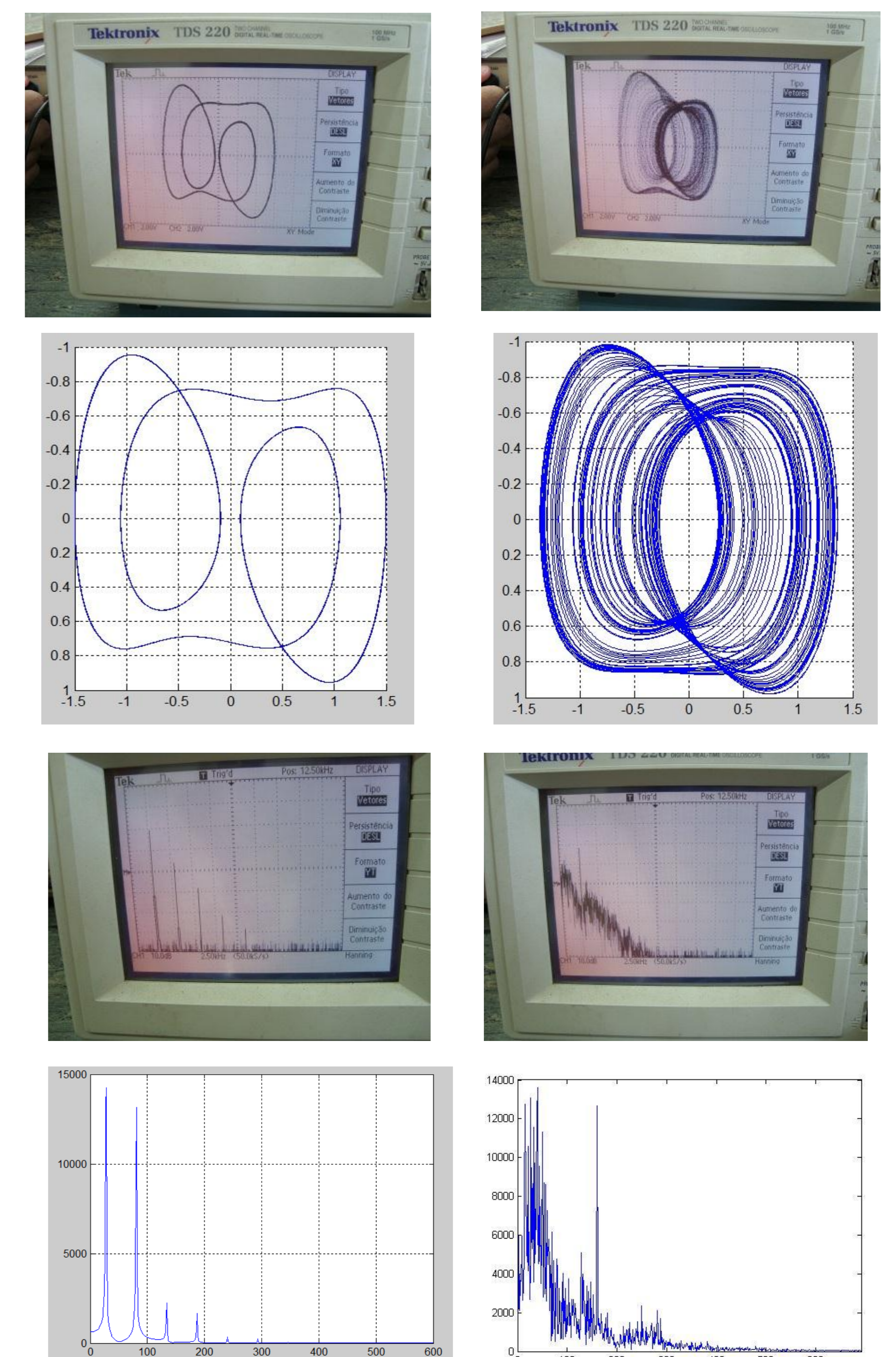


Figura 2: A primeira coluna mostra de cima para baixo o plano de fase das variáveis de estado  $x$  e  $y$  do oscilador Duffing obtido por simulação analógica e por simulação digital, respectivamente, bem como a amplitude do espectro de frequência (analógico e digital, respectivamente). Neste caso, a amplitude da excitação é dada por  $F_0 = 1.02$ , o que leva a uma oscilação periódica. A segunda coluna mostra o mesmo conjunto de simulações considerando  $F_0 = 1.25$ , o que leva ao comportamento caótico.

## Conclusão

Se, por um lado, as vantagens e facilidades introduzidas pela computação digital permitiram o melhor entendimento e avanço deste campo da ciência, por outro, a computação analógica pode oferecer um paradigma muito relevante e complementar ao ambiente digital dentro deste universo de análises, principalmente no que se refere ao tempo de simulação (realizada em tempo real) e a precisão do processo de integração (realizada continuamente no tempo).

## Agradecimentos

CNPq pelo suporte financeiro, Everton Z. Nadalin e Romis Attux pelo apoio técnico