A semiderivada e sua aplicação em sísmica

UNICAMP

Jorge de Souza Simão
(Aluno)

Jörg Schleicher
(Orientador)

Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)

INCT-GP

Resumo.

Estamos familiarizados com as derivadas ordinárias, isto é, de ordens inteiras. Seja uma função $f(x)$ contínua qualquer. Uma das notações para suas derivadas ordinárias é:

$$D[f(x)], \quad D^2[f(x)], \quad D^3[f(x)],$$

e assim sucessivamente. Estamos familiarizados com as propriedades lineares das derivadas, ou seja:

$$D[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha D[f(x)] + \beta D[g(x)],$$

onde α e β são constantes.

Uma possibilidade seria também utilizar índices de valores não inteiros para a derivada de uma função. Qual seria o significado para uma expressão do tipo:

$$D^{1/2}f(x), \quad \text{ou} \quad D^{\sqrt{2}}f(x)?$$

Embora não encontremos tais notações do tipo "derivada de ordem 1/2", em livros de Cálculo, tais idéias já eram discutidas no século XVIII por Leibnitz. Atualmente, existe uma vasta literatura que discute tal assunto, uma área denominada "cálculo fracionário". Também, veremos que derivadas não inteiras surgem naturalmente no estudo da transformada de Fourier.

Derivada fracionária de uma função.

- Derivada da função exponencial, quando n é natural:

$$D^n e^{ax} = a^n e^{ax}.$$

- Pergunta: E se n for não natural? Será que existe uma meia derivada, i.e., uma derivada de ordem $1/2$?
- De fato, é possível generalizar a definição da derivada.
- A expressão geral para a derivada fracionária, de ordem α, de uma função $f(x)$ é:

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha+1}}.$$

- Quando $\alpha > -1$, há um problema, porque quando $t \to x$, $x - t \to 0$.
- A integral diverge para todo $\alpha \geq 0$, mas converge para $-1 < \alpha < 0$.
- A escolha para o limite inferior ser zero é arbitrária, apenas para simplificações algébricas.
- De fato, o resultado da integral acima depende do valor b do limite de integração inferior.
- Denota-se a derivada fracionária de ordem α de uma função $f(x)$ usando o símbolo

$${}_bD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_b^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha+1}}.$$

- É importante observar que derivadas fracionárias envolvem integração e essas envolvem limites. Portanto, quando se fala de derivada fracionária, deve-se dizer qual o intervalo que se está trabalhando.
- Com esta definição, é possível abordar a questão da meia derivada.

Derivada de ordem $\frac{1}{2}$.

- Agora podemos estabelecer a expressão da derivada de ordem $\frac{1}{2}$. Com $\alpha = \frac{1}{2}$:

$${}_bD_x^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} \int_b^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}+1}}.$$

Mas $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$. Portanto:

$${}_bD_x^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{-2\sqrt{\pi}} \int_b^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ou: $${}_bD_x^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_b^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

Transformada de Fourier (TF)

- Também é possível definir a derivada fracionária por Transformada de Fourier.

Definição da TF

- Seja $f = f(x)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Denominaremos a TF com a letra Φ.
- Aplicação da TF, no espaço ξ, à função $f(x)$, resulta em $F = F(\xi) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
- $F(\xi) = \Phi(f(x))$. Diagrama: $f(x) \overset{\Phi}{\longmapsto} F(\xi)$
- Definição: Seja $f = f(x)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável e absolutamente integrável em $(-\infty, \infty)$. Então, a transformada de Fourier de $f(x)$, $\Phi[f(x)] = F(\xi)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que $\Phi[f(x)]$=$F(\xi)$, existe e é:

$$F(\xi) = \Phi[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx$$

Propriedades da TF

1. Linearidade. Essa propriedade decorre da linearidade da integral. Seja $f = f(x)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g = g(x)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Assim:
$$\begin{aligned}\Phi[\alpha f(x) + \beta g(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)]e^{-i\xi x}dx \\ &= \alpha F(\xi) + \beta G(\xi)\end{aligned}$$
2. Inversa Φ^{-1}: Se $F(\xi) = \Phi[f(x)]$, então $f(x) = \Phi^{-1}[F(\xi)]$. Ou seja: $f(x) \overset{\Phi}{\longmapsto} F(\xi) \overset{\Phi^{-1}}{\longmapsto} f(x)$
Expressão:
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{i\xi(x)}d\xi$$
3. Translação: Seja $x, a \in \mathbb{R}$. Então:
$$\Phi[f(x+a)] = \Phi[f(x)]e^{i\xi a} = F(\xi)e^{i\xi a}.$$
Demonstração: Aplicação de Φ^{-1} a $F(\xi)e^{i\xi a}$ resulta em $f(x+a)$.
4. Derivada. Ao aplicar Φ na derivada primeira, $f'(x)$, de $f(x)$, obtém-se:
$$\Phi[f'(x)] = i\xi\Phi[f(x)] = i\xi F(\xi).$$
Demonstração: Integração por partes da TF de $f'(x)$.

TF da n-ésima derivada

- A partir da última propriedade, podemos calcular a transformada da derivada de ordem n de $f(x)$. Por indução matemática, tem-se:

$$\begin{aligned}\Phi[f^{(n)}(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x)e^{-i\xi x}dx \\ &= (i\xi)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx \\ &= (i\xi)^n F(\xi).\end{aligned}$$

Exemplo de aplicação

- Com as propriedades acima, podemos resolver a equação diferencial:

$$y'' + y' + y = f(x) \overset{\Phi}{\longmapsto} (i\xi)^2 Y(\xi) + i\xi Y(\xi) + Y(\xi) = F(\xi)$$

- Então o problema de se resolver uma equação diferencial no espaço-x se transforma num problema algébrico no espaço-ξ. Na expressão encontramos:

$$Y(\xi) = \frac{F(\xi)}{-\xi^2 + i\xi + 1}.$$

- Portanto, aplicando Φ^{-1} em $Y(\xi)$ obtemos a solução $y(x)$ para a equação diferencial acima. Essa é uma aplicação útil da transformada de Fourier.

TF e derivada fracionária

- Temos a expressão da transformada da n-ésima derivada de $f(x)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
- Daí, surge uma indagação: Será essa expressão válida para um expoente α, $\alpha \in \mathbb{R}$?
- Se supormos que é válida, então, por inversão (propriedade 2):

$$f^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\xi)^\alpha \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx\right] e^{i\xi x}d\xi.$$

- Assim:

$$\Phi[f^{(\alpha)}] = (i\xi)^\alpha F(\xi)$$

- A expressão da α-ésima derivada ($\alpha \in \mathbb{R}$) é extensão da n-ésima derivada ($n \in \mathbb{N}$).

Conclusão

Como vimos, é perfeitamente possível estender a definição da n-ésima derivada de uma função de números n naturais para reais. Esta extensão é especialmente simples no domínio de Fourier, onde a derivada de ordem $\alpha \in \mathbb{R}$ corresponde a uma multiplicação pela α-ésima potência do produto da unidade imaginária vezes a variável associada. No domínio original da função, a definição da derivada fracionária envolve algumas dificuldades a mais e necessita de uma integral e da função Γ. Importante é observar que em correspondência a integrais, mas diferentemente das derivadas naturais, necessita-se do limitante inferior do operador para uma definição consistente.

Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq por 6 meses de bolsa de Iniciação Científica.

Referências

1. Derivada fracionária: M. Kleinz e T. J. Osler , "A child's garden of fractional derivatives", *The college Mathematics Journal*, 31, 82-88, 2000.
2. Transformada de Fourier: D. Guedes de Figueiredo, *Anlise de Fourier e equaes diferenciais parciais*, Instituto de Matemtica Pura e Aplicada (IMPA), 1977, segunda edição.