

EQUAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA 3D: UMA IMPLEMENTAÇÃO POR DIFERENÇAS FINITAS



Thiago Tamotsu Kajiyama
Aluno



Profa. Dra. Maria Amélia Novais Schleicher
Orientadora

Introdução

Reservatórios de petróleo e gás natural são encontrados utilizando-se, principalmente, o método de prospecção sísmica de reflexão, que consiste em obter informações do subsolo analisando ondas geradas no solo ou no subsolo, refletidas no subsolo e registradas na superfície.

O principal problema matemático da prospecção sísmica de reflexão é a inversão de dados sísmicos, ou seja, a recuperação de dados do subsolo através dos registros na superfície. Este problema está relacionado com o comportamento das ondas sísmicas, que são descritas pela equação da onda. Neste trabalho estudamos a equação da onda acústica em três dimensões.

Metodologia

Implementamos a solução da equação da onda acústica por diferenças finitas e utilizamos um modelo cujo resultado já era conhecido em teoria para determinar se essa implementação seria adequada.

Em seguida implementamos as PML, "Perfectly Matched Layers", que são bordas que absorvem as ondas, a fim de evitar reflexões. Utilizamos o mesmo modelo da primeira parte para comparar os resultados.

Desenvolvimento

A equação da onda acústica em três dimensões é

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{u_{tt}}{v^2} + f(t)\delta(x - x_S)\delta(y - y_S)\delta(z - z_S),$$

onde $u = u(x, y, z)$ é a pressão acústica na posição (x, y, z) , $v = v(x, y, z)$ é a velocidade de propagação no meio e $f(t)$ é a função fonte localizada em (x_S, y_S, z_S) .

Discretizando as derivadas em (x_i, y_j, z_k, t_l) , temos

$$(u_{tt})_{i,j,k}^l = \frac{u_{i,j,k}^{l-1} - 2u_{i,j,k}^l + u_{i,j,k}^{l+1}}{(\Delta t)^2} + O[(\Delta t)^2].$$

$$(u_{xx})_{i,j,k}^l = \frac{-u_{i-2,j,k}^l + 16(u_{i-1,j,k}^l + u_{i+1,j,k}^l) - 30u_{i,j,k}^l - u_{i+2,j,k}^l}{12(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^4],$$

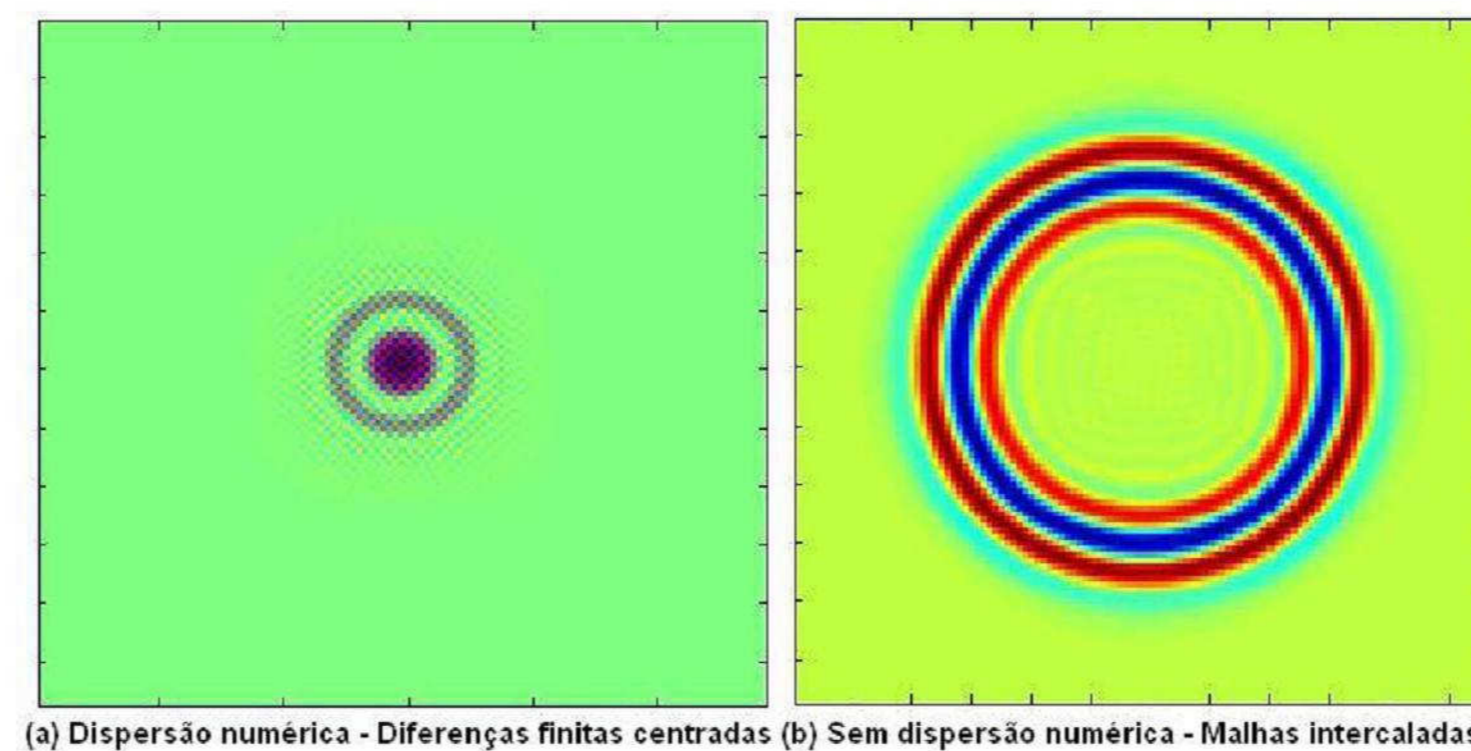
Utilizamos uma aproximação com erro de truncamento de quarta ordem no espaço e segunda ordem no tempo, e uma fonte do tipo "Kupper", pois apresentam menor dispersão numérica (Novais, 1998).

Então, substituindo as aproximações das derivadas parciais na equação da onda, temos,

$$u_{i,j,k}^{l+1} = -\frac{1}{12}[a_{i,j,k}[u_{i-2,j,k}^l + u_{i+2,j,k}^l] - 16(u_{i-1,j,k}^l + u_{i+1,j,k}^l) + 30u_{i,j,k}^l] + b_{i,j,k}[u_{i,j-2,k}^l + u_{i,j+2,k}^l] - 16(u_{i,j-1,k}^l + u_{i,j+1,k}^l) + 30u_{i,j,k}^l + c_{i,j,k}[u_{i,j,k-2}^l + u_{i,j,k+2}^l] - 16(u_{i,j,k-1}^l + u_{i,j,k+1}^l) + 30u_{i,j,k}^l] + 2u_{i,j,k}^l - u_{i,j,k}^{l-1} + f_{i,j,k}^l,$$

$$\text{onde } a_{i,j,k} = \left(\frac{v_{i,j,k}\Delta t}{\Delta x}\right)^2, b_{i,j,k} = \left(\frac{v_{i,j,k}\Delta t}{\Delta y}\right)^2 \text{ e } c_{i,j,k} = \left(\frac{v_{i,j,k}\Delta t}{\Delta z}\right)^2.$$

Para implementarmos as PML foi necessário modificar a equação que estávamos utilizando para a equação da onda acústica, pois com a implementação das PML, esta gerava dispersão numérica. Para resolver este problema utilizamos malhas intercaladas (Virieux, 1986), onde a pressão, as componentes do campo de velocidade e outras propriedades físicas são amostrados em pontos intercalados.



(a) Dispersão numérica - Diferenças finitas centradas (b) Sem dispersão numérica - Malhas intercaladas

A equação modificada é,

$$\frac{\partial v_\alpha(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \gamma(\alpha)v_\alpha(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\rho(\mathbf{r})} \frac{\partial P(\mathbf{r}, t)}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial P_\alpha(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \gamma(\alpha)P_\alpha(\mathbf{r}, t) = -\kappa(\mathbf{r}) \frac{\partial v_\alpha(\mathbf{r}, t)}{\partial \alpha},$$

$$P(\mathbf{r}, t) = \sum P_\alpha(\mathbf{r}, t),$$

onde $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\alpha \in \{x, y, z\}$, v_α representa o campo de velocidade na direção α , P o campo de pressão, ρ a densidade do meio, κ o módulo de incompressibilidade e $\gamma(\alpha)$ é o coeficiente de atenuação que é definido como

$$\gamma(\alpha) = \gamma_m[(L_{pml} - \alpha)/L_{pml}]^3; \alpha \leq L_{pml},$$

$$\gamma(\alpha) = 0; L_{pml} \leq \alpha \leq L_{pml} + \alpha_m,$$

$$\gamma(\alpha) = \gamma_m[(\alpha - L_{pml} - \alpha_m)/L_{pml}]^3; \alpha \geq \alpha_m + L_{pml},$$

ou de forma discretizada,

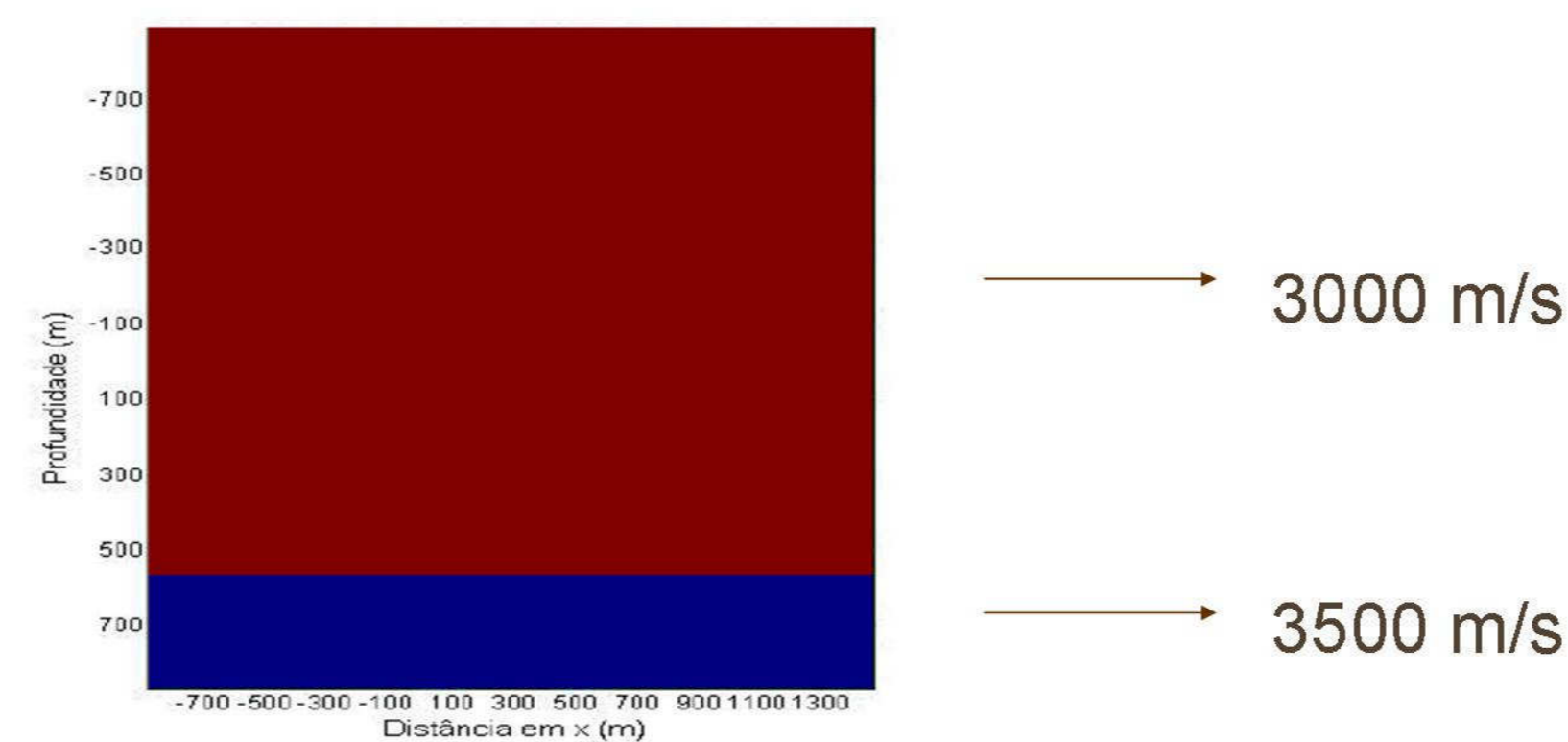
$$v_x^{l+1}(i, j, k) = v_x^l(i, j, k) - \frac{q}{\rho(i, j, k)} \frac{dt}{dx} (P^l(i, j, k) - P^l(i-1, j, k)) - dt\gamma(i)v_x^l(i, j, k),$$

$$P_x^{l+1}(i, j, k) = P_x^l(i, j, k) - \left[\frac{\kappa(i, j, k)}{dx} (v_x^{l+1}(i+1, j, k) - v_x^{l+1}(i, j, k)) - dt\gamma(i)P_x^l(i, j, k)\right],$$

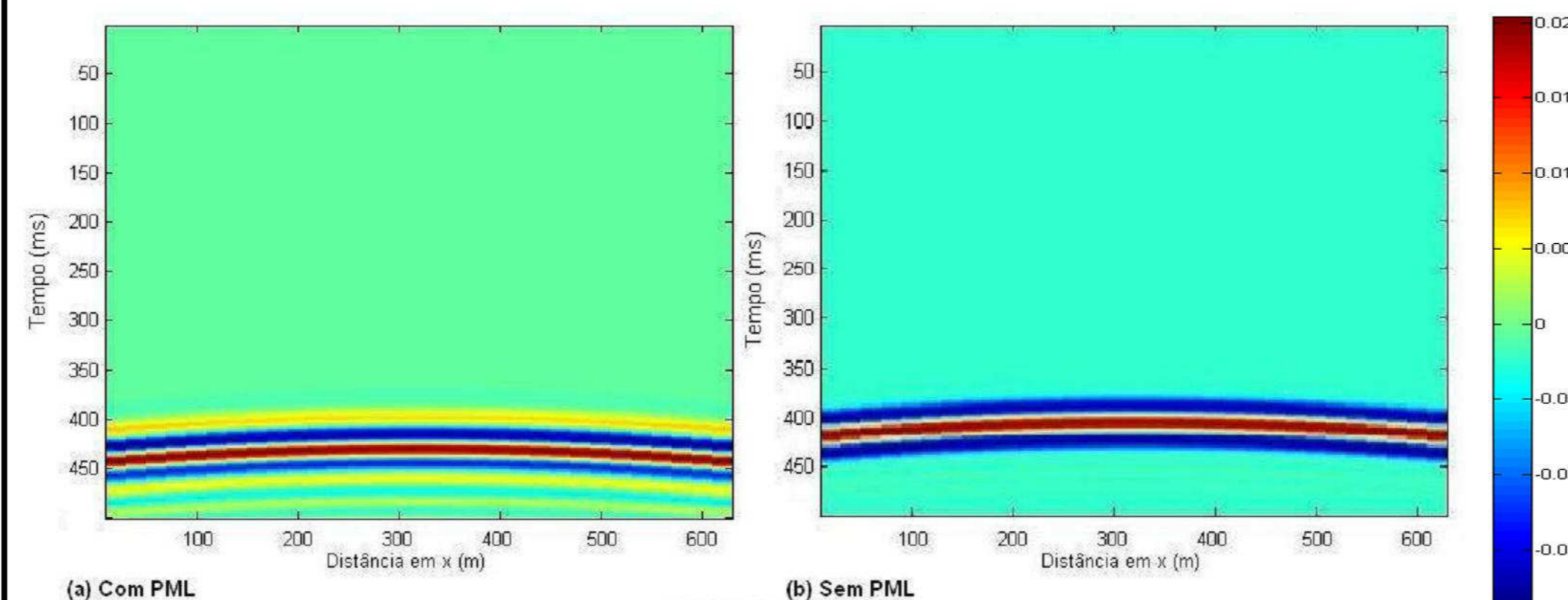
$$P^{l+1}(i, j, k) = P_x^{l+1}(i, j, k) + P_y^{l+1}(i, j, k) + P_z^{l+1}(i, j, k) + f(t).$$

Exemplo Numérico

Utilizamos, para comparar o programa com as PML e sem as PML, o mesmo meio sintético, com densidade homogênea.

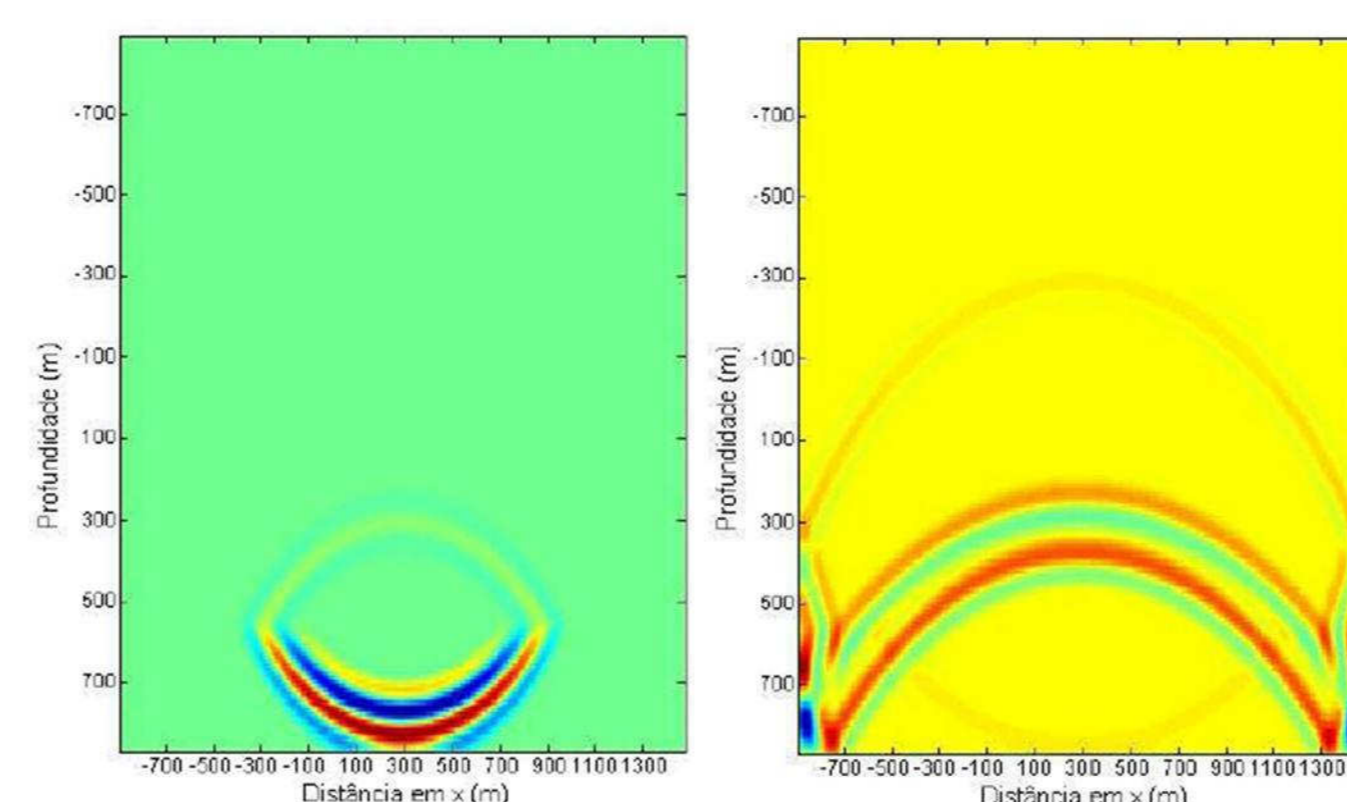


Sismogramas



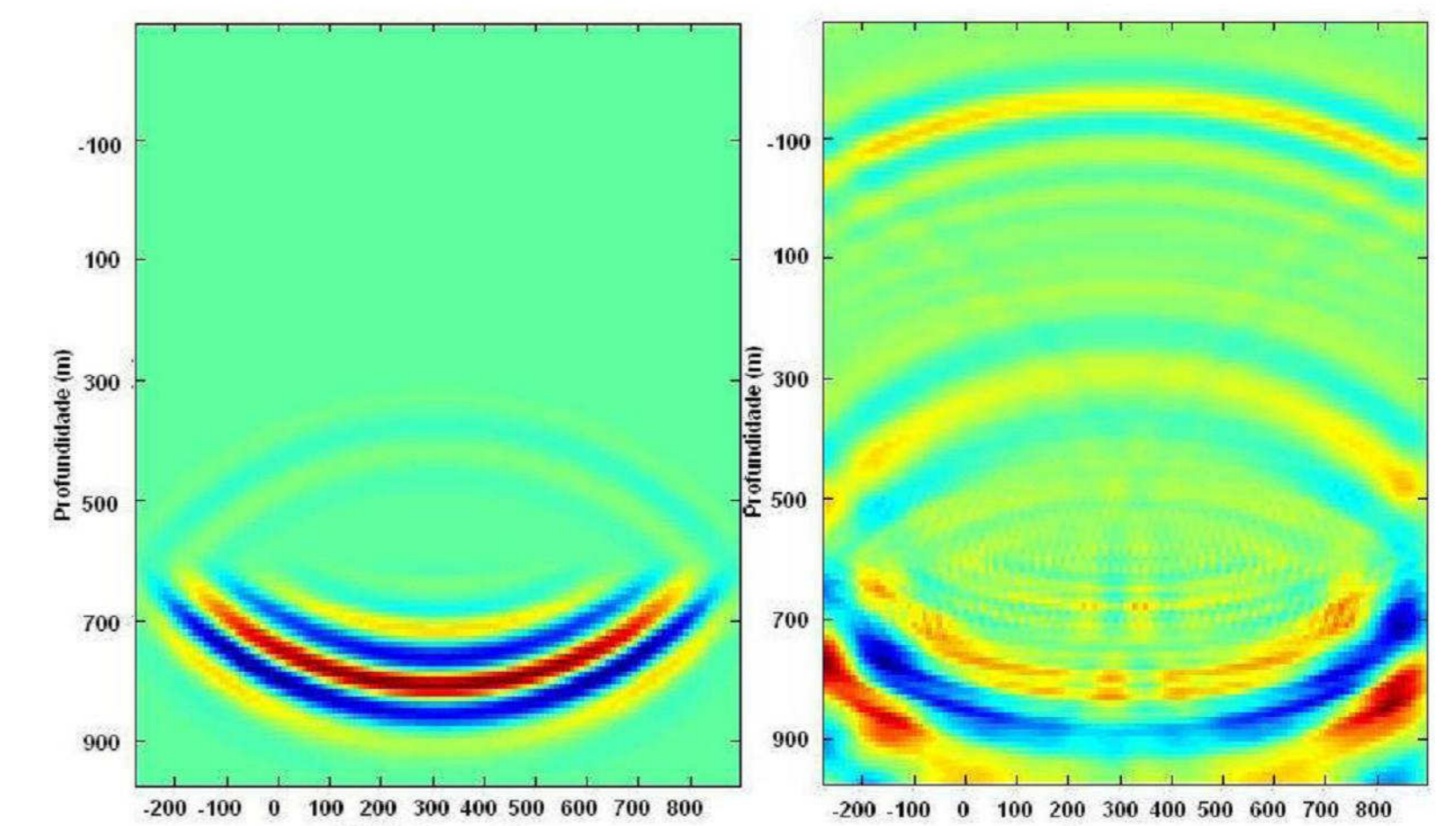
(a) Com PML

(b) Sem PML



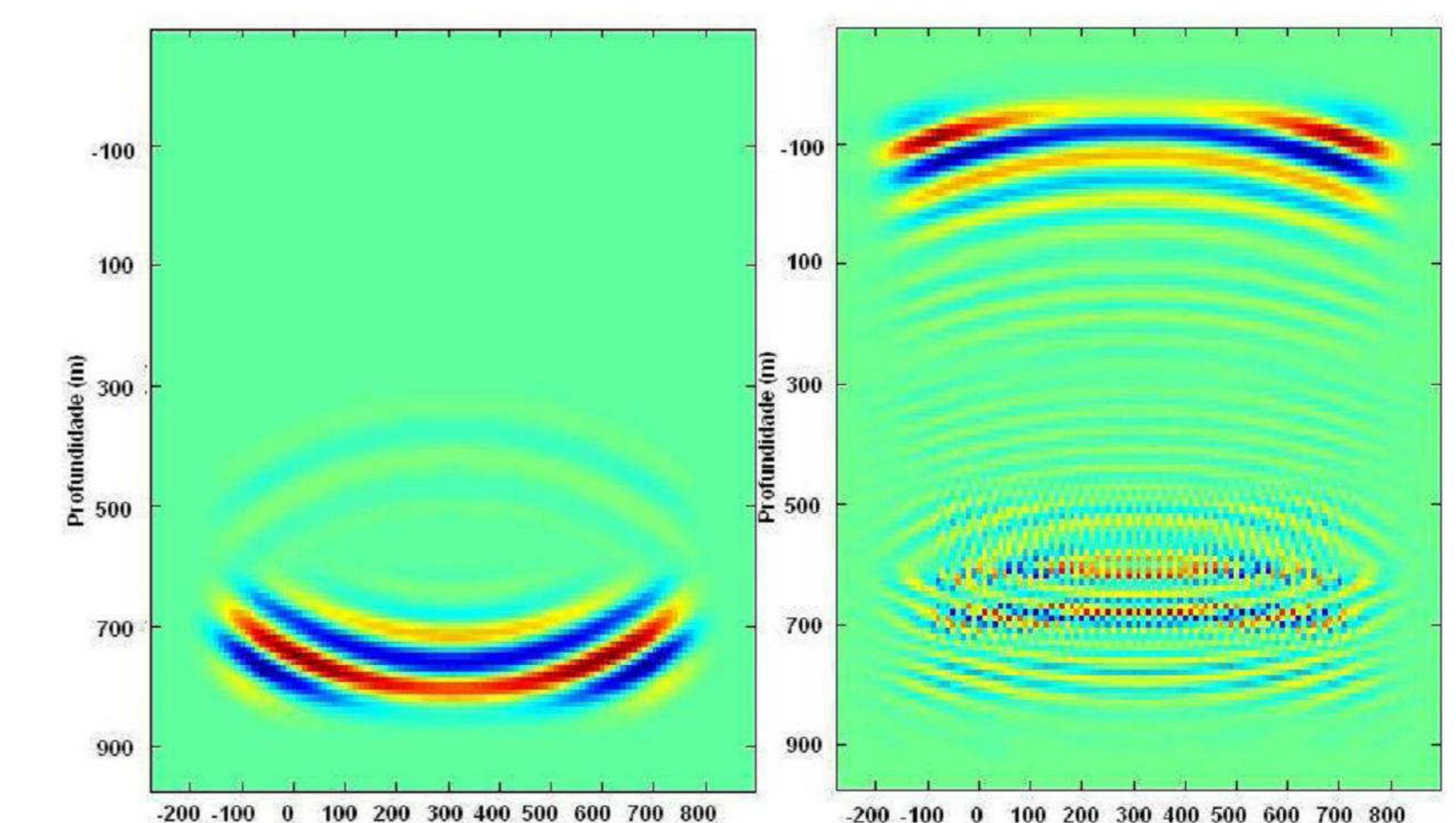
[a] t = 300 ms

[b] t = 500 ms



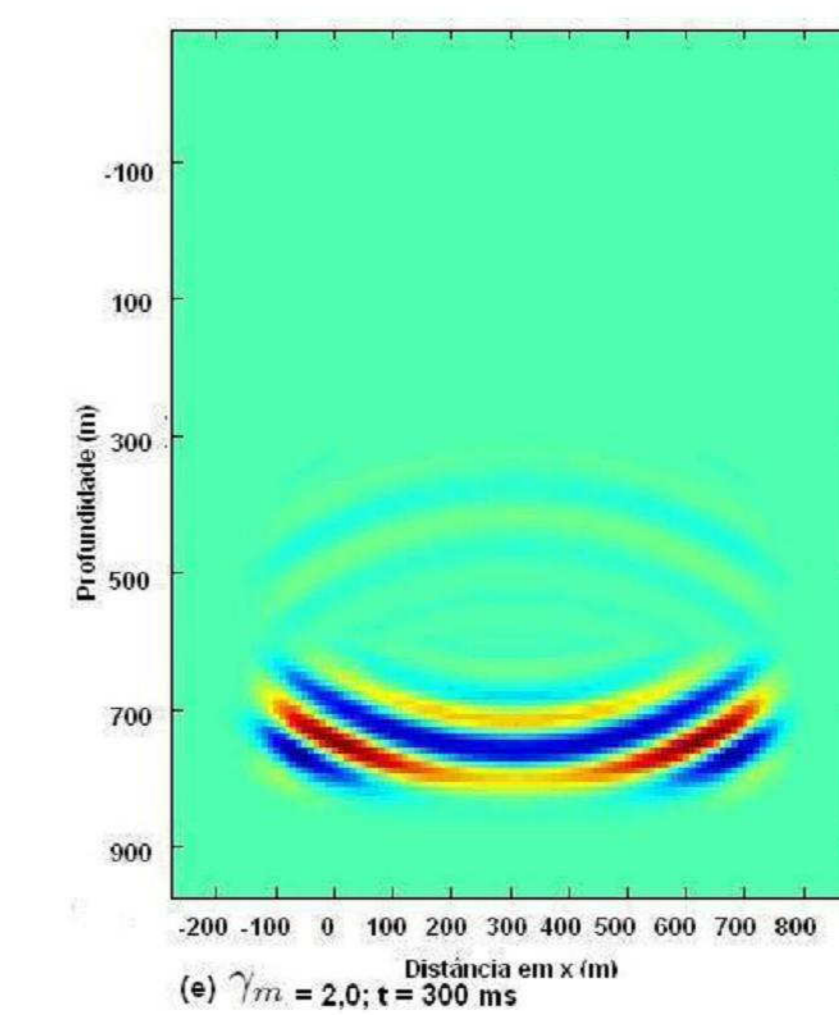
(a) $\gamma_m = 0.1; t = 300 \text{ ms}$

(b) $\gamma_m = 0.1; t = 500 \text{ ms}$



(c) $\gamma_m = 1.0; t = 300 \text{ ms}$

(d) $\gamma_m = 1.0; t = 500 \text{ ms}$



(e) $\gamma_m = 2.0; t = 300 \text{ ms}$

Conclusões

- A aproximação por diferenças finitas teve um resultado muito próximo do teórico;
- As PML são uma boa alternativa para evitar reflexões de borda.

Referências Bibliográficas

- I.R.Mufti, 1990, Large-scale three-dimensional seismic models and their significance, Geophysics, 55, 1066-1182.
- Novais, A., 1998, Modelamentos de Kirchhoff/Born para propagação de ondas, Tese de Doutorado - IMECC/UNICAMP.
- Kupper, F. J., 1958, Theoretische Untersuchungen über die Mehrfachaufstellung von Geophonen, Geophys. Prospect., 6, 194-256.
- Virieux, J. P-sv wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finitedifference method. Geophysics, v. 51, p. 889901, 1986.
- Silva Neto, F. A., 2004, Modelagem Acústica por Diferenças Finitas e Elementos Finitos em 2-D e 2,5-D, Tese de Mestrado - Centro de Geociências/UFGA.