RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Orientadora: Gabriela Planas

Autor: Faister Cabrera Carvalho
Email: faister.carvalho@fatec.sp.gov.br
Fone: (19) 3601 3963

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Apoio: CNPq

Palavras-chave: Equações diferenciais - Métodos numéricos - Aproximação

Introdução

Equações diferenciais de primeira ordem podem ser escritas como $y' = f(x, y)$, onde y é uma função de x e y' representa a variação de y com relação a x.

Resolver uma equação deste tipo significa encontrar a função y. Em algumas raras vezes é possível isolar y' e integrar toda a equação para achar tal função. Em outros casos isso se torna complicado demais, ou talvez impossível.

Existem métodos analíticos e métodos numéricos para resolver equações diferenciais de primeira ordem. Os métodos analíticos têm por finalidade trabalhar a equação para encontrar uma função que represente y, enquanto os métodos numéricos se baseiam em condições iniciais para gerar aproximações para outros valores de y, sem ter a própria função y.

Não existe garantia de que todas as equações diferenciais tenham soluções analíticas. Por esse motivo soluções numéricas são mais práticas, já que se aplicam facilmente a qualquer equação.

Métodos Numéricos

Para os métodos numéricos consideraremos as equações diferenciais na forma $y' = f(x, y)$.

Os analisados se baseiam na função f(x, y) e em uma condição inicial para encontrar valores aproximados da função y. Para se chegar ao valor desejado são efetuados um ou mais passos. O passo consiste em achar um valor intermediário que é então usado como condição inicial no passo seguinte.

Cada método numérico usa uma fórmula diferente para calcular a aproximação de y a cada passo. Fórmulas mais aprimoradas são ditas como de ordem maior, o que significa que o erro de aproximação gerado a cada passo é proporcional a uma potência maior de h (tamanho do passo), gerando menos erro.

Existem algorítmos que combinam métodos explícitos e implícitos para diminuir o erro efetuando poucos cálculos. Tais algorítmos são denominados de previsão e correção, e normalmente demandam menos cálculos para atingir níveis de precisão comparáveis aos de métodos tradicionais.

Lista de algoritmos aplicados

Método	Ordens
Previsão: Euler. Correção: Euler Aprimorado.	P: 1ª C: 2ª
Algoritmo de Bogacki-Shampine.	P: 2ª C: 3ª
Algoritmo de Runge-Kutta-Fehlberg.	P: 4ª C: 5ª
Previsão: Adams-Bashforth. Correção: Adams-Moulton.	P: 4ª C: 4ª

Software de integração numérica

Foi desenvolvido um software para aplicação repetitiva dos algoritmos de métodos numéricos listados acima (sendo todos de previsão e correção), que exibe as aproximações geradas por cada método em tabela e gráfico, assim como o número de vezes que a f(x) teve de ser resolvida para tal.

O software desenvolvido possui controle de margem de erro, limitando o truncamento local ao variar o tamanho do passo durante o cálculo das aproximações.

A equação diferencial usada como exemplo nas imagens abaixo é dada por $y' = 1 - t + 4 * y$, com condição inicial $y(0) = 1$.

Informações | Tabela | Gráfico

Tempo	Euler + Aprimorado	Bogacki–Shampine	Kutta–Fehlberg	Bashforth-Moulton
0.5	8.3697251712	8.73286393030806	8.712212839292754	8.719244683210386
0.6	12.442193253376	13.089873844782456	13.05289560452669	13.070854486067201
0.7	18.457446014996478	19.580543042465976	19.516168370282905	19.549505924488006
0.7999999999999999	25.55583227813571	29.255769842315217	29.145988386295194	29.20145511777868
0.8999999999999999	40.78956256564595	43.68405501531687	43.49976427020334	43.58704190989074
0.9999999999999999	60.71371475166635	65.20643824552761	64.90088771540972	65.03377067824924
1.0999999999999999	85.80445672013435	97.31699929605813	96.815468322073	96.20524051354275
1.2	131.21555759861843	145.23076868267668	144.41435859622032	143.6256036174411
1.3	200.7736933255941	216.73135328451778	215.41160071293535	214.2898409738387
1.4000000000000001	291.0623331701793	323.43604582225237	321.31524805598997	319.6096886429748
1.5000000000000002	446.3204000406511	482.68404292457257	479.293380560377	476.7124810566604
1.6000000000000003	665.6101763000761	720.3546735330223	714.9578857300193	711.0559334582246
1.7000000000000004	992.7330331685916	1035.3693793751602	1066.5173916699484	1060.6132984669366
1.8000000000000005	1480.7335515543691	1423.8276365999648	1590.972744625683	1581.846307545041
1.9000000000000006	2208.729217339154	2393.9156542265114	2373.359619360885	2358.871119231583
2.0000000000000004	3294.760751982969	3572.02056359077	3540.5369391863615	3346.7030100727834
Chamadas a y'	342	104	120	60