



Paola Cunha Ferraz  
DMA - IMECC - UNICAMP  
Bolsista - SAE/Unicamp

Márcia A. Gomes-Ruggiero  
DMA - IMECC - UNICAMP  
Orientadora

## Introdução

Considerando a matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , dizemos que  $\lambda \in \mathbb{C}$  é autovalor de  $A$  e  $v \in \mathbb{C}^n, v \neq 0$  é autovetor de  $A$  associado a  $\lambda$  se,

$$Av = \lambda v \Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0.$$

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  é o polinômio característico de  $A$ .

## Método das Potências

Sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  os autovalores de  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  com autovetores correspondentes  $v_1, \dots, v_n$  tais que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Escolhemos  $q \in \mathbb{C}^n$  e geramos os vetores  $q_{j+1} = Aq_j = A^j q$ .

### Shifts

Se  $(\lambda, v)$  é autopar de  $A$ , então  $(\lambda - \rho, v)$  é autopar de  $(A - \rho I)$ , onde  $\rho$  é um escalar.

Chamamos  $\rho$  de shift que escolhido adequadamente pode acelerar a convergência.

Por exemplo, se  $\rho \sim \lambda_i$  teremos:

$$|\lambda_i - \rho| \gg |\lambda_k - \rho|, \forall k \neq i.$$

### Algoritmo do Método das Potências:

Dados  $q_0 = q_0 / \|q_0\|$  e um shift  $\rho$ ;

Para  $j = 1, \dots, j_{max}$ :

$$\bar{q}_j = (A + \rho I)q_{j-1};$$

$$\alpha_j = \|\bar{q}_j\|;$$

$$q_j = \bar{q}_j / \|\bar{q}_j\|;$$

Pare se  $\|\alpha_{j+1} - \alpha_j\| < \epsilon$ , ou se  $j > j_{max}$ ;

$$\lambda = \alpha_j - \rho;$$

$$v = q_j;$$

### Iteração Inversa

É o Método das Potências usual aplicado na matriz  $A^{-1}$ .

### Iteração com quociente de Rayleigh

Combinamos a *Iteração Inversa* e *Potência com shift*, com *shift* dado por  $\rho^{(j)} = q_j^* A q_j / q_j^* q_j$ .

## Iteração QR

Dada uma matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  geramos uma sequência de matrizes,  $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots$ , da seguinte maneira,

$$A^{(j-1)} = Q^{(j)} R^{(j)} \quad ; \quad A^{(j)} = R^{(j)} Q^{(j)}.$$

Temos que, para todo  $j = 0, 1, \dots$ ,  $A^{(j)}$  e  $A^{(j-1)}$  são semelhantes,

$$A^{(j)} = R^{(j)} Q^{(j)} = Q^{*(j)} A^{(j-1)} Q^{(j)}.$$

Sob certas condições a sequência  $\{A^{(j)}\}$  converge para uma matriz triangular superior com os autovalores de  $A$  como diagonal.

Diminuimos o custo das iterações da *Iteração QR* realizando duas fases:

1. Reduzimos  $A$  para sua forma Hessenberg superior  $H$ .
2. Aplicamos a *Iteração QR* em  $H$ .

Afim de melhorar a convergência do algoritmo podemos usar *shifts*.

### Shift Simples

Aplique a *Iteração QR* sem *shift* em  $H$ . Após algumas iterações tomamos  $h_{ii}$  como *shifts*.

### Shift de Wilkinson

Usa como *shift* o autovalor da submatriz  $2 \times 2$  de  $H^{(j)}$ ,

$$\hat{H}_n^{(j)} = \begin{bmatrix} h_{n-1,n-1}^{(j)} & h_{n-1,n}^{(j)} \\ h_{n,n-1}^{(j)} & h_{n,n}^{(j)} \end{bmatrix},$$

que é mais próximo de  $h_{n,n}^{(j)}$ .

### Algoritmo da Iteração QR com shift:

Seja  $H^{(0)} = H$  forma Hessenberg superior de  $A$ ;

Para  $j = 1, 2, \dots, N$ :

obtenha o shift  $\rho_n^{(j)}$ ;

$$H^{(j-1)} - \rho_n^{(j)} I = Q^{(j)} R^{(j)};$$

$$R^{(j)} Q^{(j)} + \rho_n^{(j)} I = H^{(j)};$$

## Algoritmo de Arnoldi

Dada  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  queremos encontrar uma matriz unitária  $Q$  tal que  $H = Q^* A Q$  seja Hessenberg superior. Assim,

$$q_{k+1} h_{k+1,k} = A q_k - \sum_{i=1}^k q_i h_{ik} \quad (1)$$

### Algoritmo de Arnoldi:

Dado  $q_1$  tal que  $\|q_1\|_2 = 1$  e  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

Para  $k = 1, 2, \dots, (n-1)$ :

Para  $i = 1, 2, \dots, k$ :

$$h_{ik} = q_i^* A q_k;$$

$$\hat{q}_{k+1} = A q_k - \sum_{i=1}^k q_i h_{ik};$$

$$h_{k+1,k} = \|\hat{q}_{k+1}\|_2;$$

$$q_{k+1} = \hat{q}_{k+1} / h_{k+1,k}, \text{ dado que } h_{k+1,k} \neq 0;$$

### Algoritmo de Lanczos

O *Algoritmo de Lanczos* é o *Algoritmo de Arnoldi* aplicado a matrizes reais e simétricas.

## Aplicações

### Vibrações de um Prédio:

Considere um prédio de quatro andares feito de concreto. Supondo que suas colunas atuam como molas, queremos analisar os modos de vibração do prédio.

Esse é um problema de vibração livre e sabemos que, assumindo uma solução da forma  $y(t) = x e^{i\omega t}$ , é equivalente ao seguinte problema de autovalores e autovetores:

$$Kx = \lambda Mx, \quad (2)$$

$K$ : matriz das constantes elásticas;  $M$ : matriz das massas dos andares,  $\lambda = \omega^2$ .

Encontramos pela *Iteração QR* todos os 4 autopares de (2) caracterizamos os 4 modos de vibração do prédio dados na Figura 1.

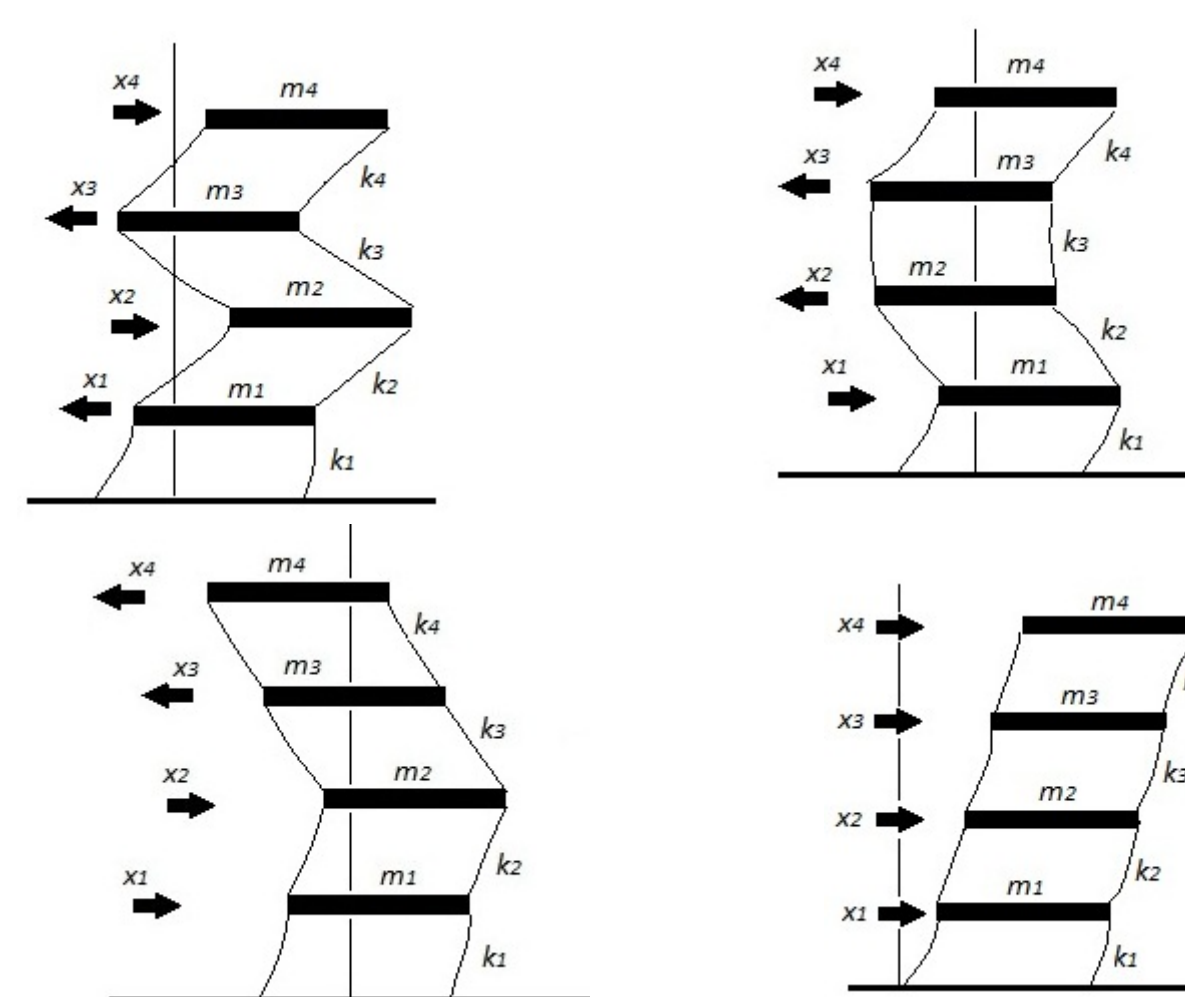


Fig. 1: Modos de vibração.

A soma desses modos de vibração determinam o movimento oscilatório do prédio.

### Análise de Componentes principais - Medidas de um Corpo:

Trata-se de um método de redução de dados que preserva a variância. Dessa forma podemos representar os dados originais por um novo conjunto reduzido de dados sem

perder informação. O novo conjunto é denominado *componentes principais* (CP's).

Dado  $\mathcal{X}$  um conjunto de  $n$  medidas de  $p$  variáveis aleatórias, obtemos as CP's projetando as  $p$  variáveis num subespaço gerado pelos autovetores da sua matriz de covariância  $C$ .

Encontrando o autopar  $(\lambda_k, v_k)$  de  $C$ , obtemos cada CP por,

$$(CP)_k^t = v_k^t \mathcal{X}; \quad k = 1, \dots, p.$$

A porcentagem da variância de  $\mathcal{X}$  que cada CP possui é dada pelos autovalores da forma,

$$P_r(k) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_p}, \quad k = 1, \dots, p.$$

Se as  $i$ 's primeiras CP's acumularem mais de 95% da variância, podemos tomar essas CP's como um novo conjunto de dados.

Medimos, em metros, a altura e o tamanho da perna de dez pessoas. As duas variáveis aleatórias são mostradas na Figura 2.

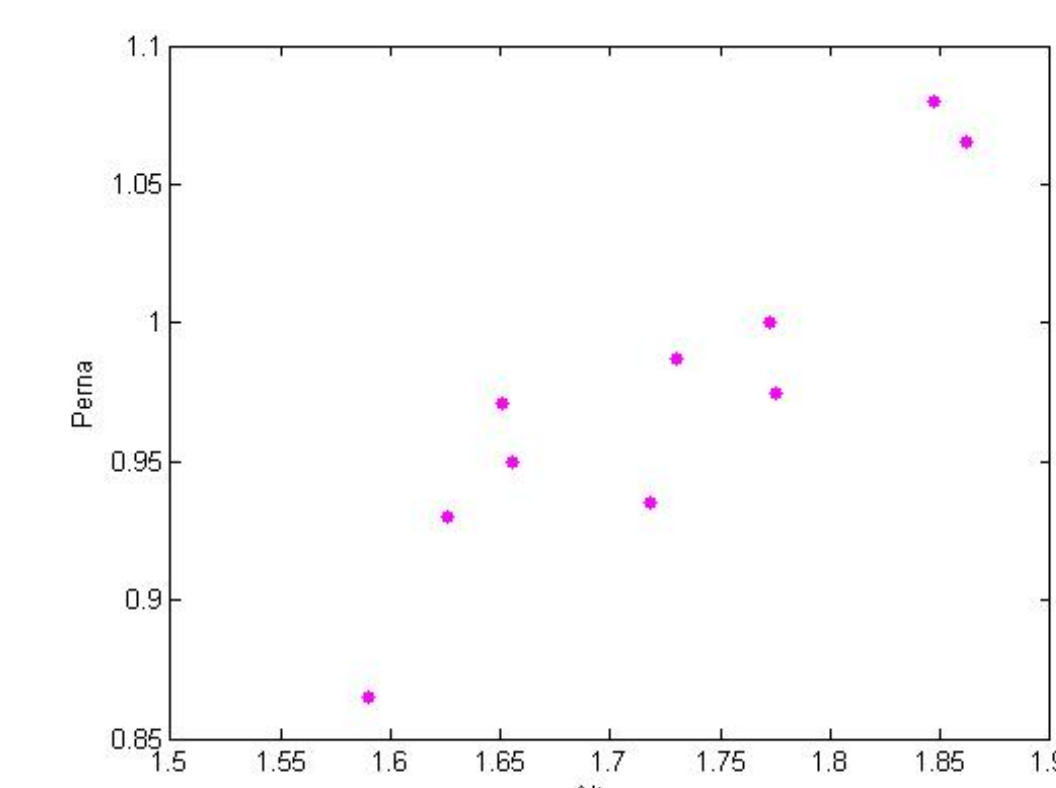


Fig. 2: Gráfico dos dados.

Calculamos os autovalores da matriz  $C$  e obtivemos  $\lambda_1 = 4.8799e - 4$  e  $\lambda_2 = 0.0121$ , com respectivos  $P_r$ 's iguais a, 3.9% e 96.1%. Podemos construir uma *componente principal* que preserva 96% da variância dos dados originais:  $(CP)_2^t = v_2^t \mathcal{X}$ .

Ao construirmos as *componentes principais*, estamos representando os dados por suas coordenadas na base formada pelos autovetores da matriz de covariância. Vemos esse efeito graficamente na Figura 3, na qual os dados estão mais esparsos ao longo do eixo associado ao autovetor  $v_2$ .

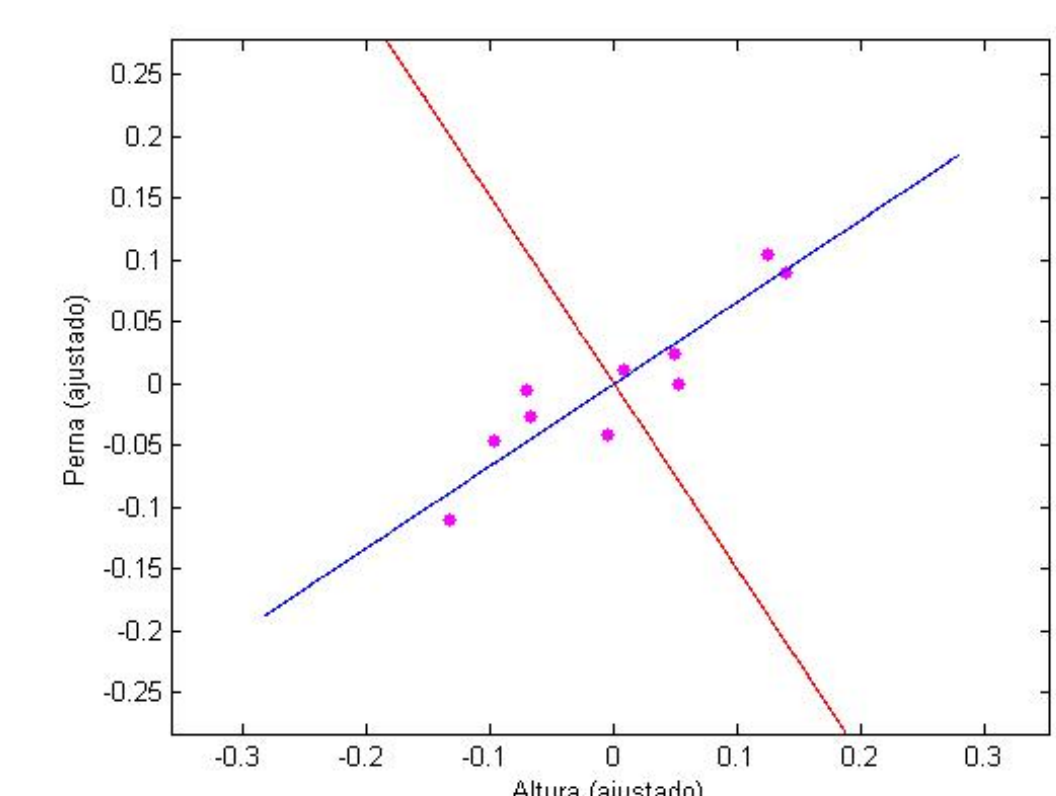


Fig 3: Eixos - autovetores.

## Referências

- [1] B.N. Datta. *Numerical Linear Algebra and Applications*. Pacific Grove: Brooks/Cole Pub., 1995.
- [2] D.S. Watkins. *Fundamentals of Matrix Computations*. Wiley International Editions. Wiley, 1991.