

# RUDIMENTOS DA TEORIA DE CONTROLE DE SISTEMAS MECÂNICOS

Victor Hugo Macedo da Silva ( [vhmacedo@gmail.com](mailto:vhmacedo@gmail.com) )

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Antonio Mosna  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA  
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA  
CNPq/PIBIC



## Objetivos

O objetivo deste trabalho foi o de, inicialmente, desenvolver as ferramentas matemáticas apropriadas para lidar com sistemas mecânicos no contexto da teoria de controle. Aqui apresentamos apenas a parte inicial do projeto, que foi interrompido consideravelmente antes de sua conclusão: como fui aceito no programa de intercâmbio de duplo diploma com a École Polytechnique, Paris, desenvolvi apenas a parte inicial deste estudo.

## Introdução

Em sistemas mecânicos simples, definimos o estado de um sistema pela equação:

$$m_i \ddot{r}_i = \dot{p} = F_i^{(e)} + \sum_j F_{ij}$$

Entretanto, ela é pode ser de difícil solução em problemas da mecânica onde existem vínculos entre as partículas (como, por exemplo, em um corpo rígido onde distâncias as partículas são fixas). Se as equações das restrições puderem ser expressas como equações que conectam as coordenadas das partículas (e possivelmente o tempo), sendo da forma

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, t) = 0,$$

então as restrições são ditas HOLONÔMICAS, como no caso do corpo rígido. Uma partícula situada na superfície de uma esfera constitui outro exemplo de um problema com vínculos holonômicos. Restrições que não podem ser expressas da forma acima são ditas NÃO-HOLONÔMICAS.

Sistemas com vínculos podem ser mais facilmente estudados usando formulações alternativas às equações de Newton, como o princípio de Hamilton.

## Equações de Euler-Lagrange

O problema básico do cálculo variacional é determinar funções que extremizem funcionais da forma  $J = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(x), y'(x); x\} dx$ , onde  $y'(x) = dy/dx$  e  $x$  é a variável independente. A condição para que isso ocorra é que as Equações de Euler-Lagrange sejam válidas:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} = 0; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

Onde assumimos que  $f$  pode depender de várias funções ( $y_1(x), y_2(x), \dots$ ) e suas derivadas.

## Princípio de Hamilton

O Princípio de Hamilton pode ser enunciado como: "De todos os caminhos pelos quais um sistema dinâmico pode se mover de um ponto a outro dentro de um intervalo de tempo (consistente com todos os vínculos), o caminho real seguido é aquele que minimiza a integral no tempo da diferença entre a energia cinética e potencial."

Por exemplo, considerando uma partícula em um campo conservativo e fazendo  $L=T-U$  (Lagrangiana do sistema):  $T = T(\dot{x}_i)$  e  $U = U(x_i) \Rightarrow T - U = L(x_i, \dot{x}_i)$ . Assim, temos

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, \dot{x}_i) dt = 0 \quad (*)$$

A equação de Euler-Lagrange correspondente à expressão (\*) é

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Uma forma mais geral de (\*) é feita a partir das coordenadas generalizadas adaptadas a um dado conjunto de vínculos ( $q_j$ ):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0; \quad j = 1, 2, 3, \dots, s.$$

## Conclusão

Uma vantagem do método de Lagrange é que não é necessário calcular explicitamente as forças de vínculo na formulação: ele é naturalmente adaptado à dinâmica do sistema.