O Problema dos 3-Fluxos em Grafos

Marco Antônio Lasmar Almada

ra092208@students.ic.unicamp.br

Instituto de Computação – Unicamp

Financiado por bolsa PIBIC/CNPq

Orientação: C. N. Campos – Instituto de Computação

Palavras-chave: Fluxos Inteiros, Grafos Planares, Conexidade

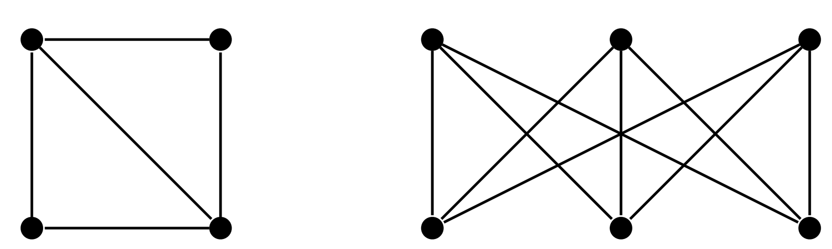
XX Congresso Interno de Iniciação Científica da Unicamp

Introdução

Um *grafo* G é definido por um conjunto de *vértices* $V(G)$, um conjunto de *arestas* $E(G)$ e uma função que associa a cada aresta e em $E(G)$ dois vértices em $V(G)$, as *extremidades* de e.

Planaridade

Definição: Um grafo é *planar* se pode ser desenhado em um plano de maneira que suas arestas se cruzem apenas em suas extremidades.



(a) Um grafo planar. (b) Um grafo não-planar.

Figura 1: Planaridade.

Fluxos Inteiros

Podemos atribuir orientações às arestas de um grafo, de forma que cada aresta possua uma *cauda* e uma *cabeça*.

O conjunto das arestas com cabeça em um vértice v é denotado por $E^-(v)$, e o conjunto das arestas com cauda em v, por $E^+(v)$.

Definição: Um *k-fluxo* de G é definido por um par (D, f), em que D é uma orientação das arestas de G e $f : E(G) \to \{1, 2, \ldots, k-1\}$ é tal que

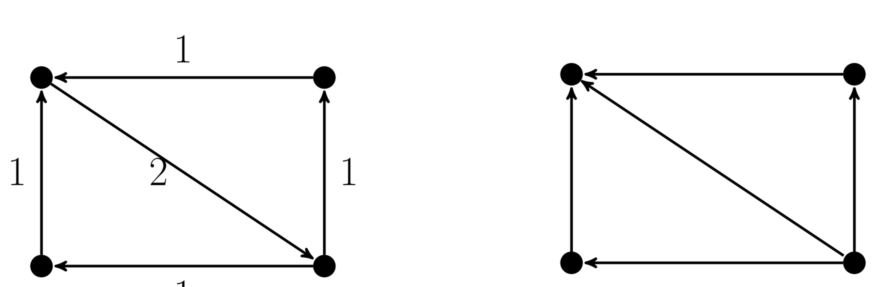
$$\sum_{e \in E^-(v)} f(e) = \sum_{e \in E^+(v)} f(e), \forall v \in V(G)$$

Definição: Um $(\mathrm{mod}\ k)$*-fluxo* de G é tal que

$$\sum_{e \in E^-(v)} f(e) \equiv \sum_{e \in E^+(v)} f(e) \pmod{k}, \forall v \in V(G)$$

Um grafo admite um k-fluxo se e somente se admitir um $(\mathrm{mod}\ k)$-fluxo.

Definição: Uma $(\mathrm{mod}\ 3)$*-orientação* das arestas de um grafo é uma orientação das arestas tal que $|E^+(v)| \equiv |E^-(v)| \pmod{3}, \forall v \in V(G)$



(a) Um 3-Fluxo. (b) Uma $(\mathrm{mod}\ 3)$-orientação.

Figura 2: Exemplo de fluxos em um grafo.

Conjectura dos 3-Fluxos

W. T. Tutte propôs em 1966 a seguinte conjectura em relação a existência de 3-fluxos:

Todo grafo sem aresta de corte e sem 3-cortes admite um 3-fluxo.

Em 1960, foi demonstrado o Teorema de Grötzsch, segundo o qual todo grafo planar livre de triangulos admite uma 3-coloracao. Usando dualidade e a equivalência entre k-coloração de faces e k-fluxos, o Teorema de Grötzsch mostra que a Conjectura dos 3-Fluxos é verdadeira para os grafos planares, sem arestas de corte e sem 3-cortes. O caso geral da conjectura continua em aberto, e é um dos grandes desafios atuais da teoria de Fluxos Inteiros.

Além da Conjectura dos 3-Fluxos, W. T. Tutte também propôs as conjecturas dos 4-Fluxos e dos 5-Fluxos, generalizando respectivamente o Teorema das 4 Cores e o Teorema das 5 Cores.

Metodologia

O projeto consistia em uma abordagem teórica do problema dos 3-Fluxos em grafos.

Em um primeiro momento, foi realizado um estudo de fundamentos de Teoria de Grafos, empregando livros-texto célebres da área. Posteriormente, foi feito um estudo de uma dissertação de mestrado e de um artigo recente da área.

A última fase do projeto foi estudar a nova demonstração do Teorema de Grötzsch feita por Younger e Richter [3] e que usa a teoria de fluxos.

Resultados

Equipartições $(\mathrm{mod}\ 3)$-orientáveis

O primeiro dos resultados foi demonstrado por C. N. da Silva em sua dissertação de mestrado [1]. Numa primeira etapa, são efetuadas reduções para mostrar que a demonstração ou refutação da Conjectura dos 3-fluxos para o caso de grafos 5-regulares é suficiente para lidar com o caso geral. Em seguida, são introduzidas as *equipartições* $(\mathrm{mod}\ 3)$*-orientáveis*, que dividem o conjunto de vértices de um grafo G em partes V^+ e V^- tais que

$$|E^+(v)| > |E^-(v)| \text{ e } |E^+(v)| \equiv |E^-(v)| \pmod{3}, \forall v \in V^+$$

$$|E^+(v)| < |E^-(v)| \text{ e } |E^+(v)| \equiv |E^-(v)| \pmod{3}, \forall v \in V^-$$

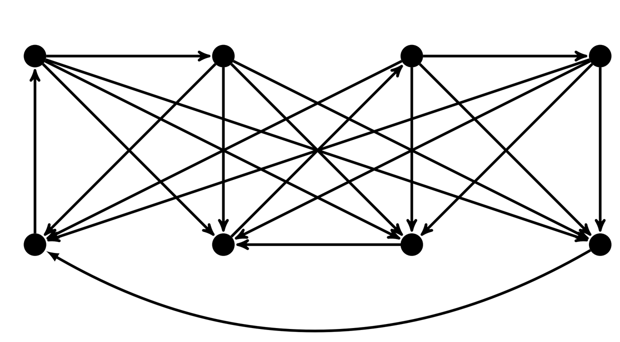


Figura 3: Equipartição $(\mathrm{mod}\ 3)$-orientável.

São apresentadas duas caracterizações para as equipartições $(\mathrm{mod}\ 3)$-orientáveis, uma delas pela existência de emparelhamento perfeito em um grafo bipartido derivado da equipartição, e a outra baseada no tamanho dos cortes de arestas do grafo.

Existência de 3-Fluxos em Grafos Simples

Fan e Zhou demonstraram [2] que um grafo simples G que satisfaça a condição

$$d(x) + d(y) \geq |V(G)|$$

não admite um 3-fluxo se e somente se for um dos grafos com até cinco vértices presentes na Figura 4, ou um grafo obtido a partir de um $K_{3,n-3}$, $n \geq 6$, pela adição de uma aresta entre dois vértices de grau $n-3$.

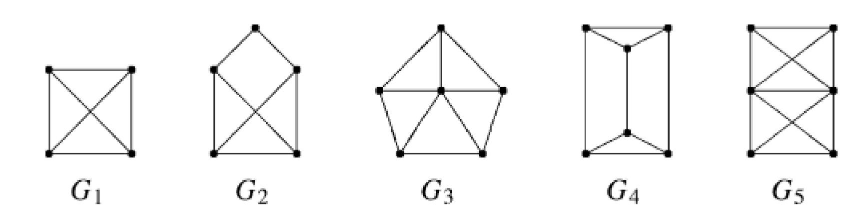


Figura 4: Grafos simples com $d(x) + d(y) \geq |V(G)| \leq 6$, sem 3-fluxo

No artigo, são introduzidas técnicas interessantes para a demonstração. Uma delas é a utilização de subgrafos cuja contração não altera a existência (ou não) de um fluxo no grafo original. Tais subgrafos são denominados $\mathbb{Z}_3$*-fluxo contráteis*.

Teorema de Grötzsch

No dia 11 de maio de 2012, na série de seminários do departamento de Combinatória e Otimização da Universidade de Waterloo (Canadá), D. H. Younger apresentou uma nova demonstração para o Teorema de Grötzsch, feita em conjunto com R. B. Richter.

A demonstração proposta é inovadora porque não faz uso da fórmula de Euler. Ao invés disso, emprega resultados de teoria de fluxos para efetuar uma demonstração por indução. A demonstração se baseia na busca de $(\mathrm{mod}\ 3)$-orientações especiais em submapas com até três vértices de grau 3 em suas fronteiras, empregando-os para obter uma $(\mathrm{mod}\ 3)$-orientação do mapa original.

Conclusões

O projeto explorou desdobramentos recentes na Teoria de Fluxos Inteiros: o artigo de Fan e Zhou fornece uma caracterização para a existência de 3-fluxos em grafos simples em função da soma de graus de vértices adjacentes. Já a demonstração de D.H. Younger e R. B. Richter para o Teorema de Grötzsch demonstra um caso particular da Conjectura dos 3-Fluxos.

Apesar de a validade do teorema já ser conhecida, a demonstração baseada em fluxos inteiros envolveu métodos novos, que podem vir a ser úteis para a obtenção de resultados mais fortes e também para a investigação das Conjecturas dos 4-Fluxos e dos 5-Fluxos.

Já no problema dos 3-fluxos, uma possibilidade ainda em aberto é o estudo de equipartições $(\mathrm{mod}\ 3)$-promissoras em grafos planares, dando continudade ao trabalho de C.N. da Silva sobre o assunto.

Referências

[1] C. N. da Silva. *A Conjetura dos 3-Fluxos de Tutte e emparelhamentos em grafos bipartidos.* Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 2001.

[2] G. Fan e C. Zhou. *Degree sum and nowhere-zero 3-flows.* Discrete Mathematics, 308(24):6233–6240, 2008.

[3] D. H. Younger. On Tutte's 3-flow conjecture. Tutte Seminar, 2012. Trabalho desenvolvido em conjunto com R. B. Richter.