

INTRODUÇÃO

O problema de sincronização de sistemas dinâmicos é suscitado por modelos de diversos sistemas biológicos e também por aplicações práticas como a construção de sistemas de comunicação. Neste trabalho, apresentaremos os aspectos teóricos fundamentais para a compreensão e caracterização desse fenômeno, e também exporemos resultados de algumas simulações abrangendo diferentes paradigmas de construção de sistemas de comunicação baseados no sincronismo de sistemas caóticos. Também serão apresentados elementos de análise dinâmica específicos deste contexto.

METODOLOGIA

Utilizamos a definição de estabelecida por Pecora e Carroll [1], em que a sincronização é estabelecida através da interligação entre dois sistemas dinâmicos caóticos e idênticos, transmitindo uma variável comum de um subsistema para o outro. Serão descritas, a seguir, algumas simulações realizadas utilizando a configuração mestre-escravo para o sistema de Lorenz.

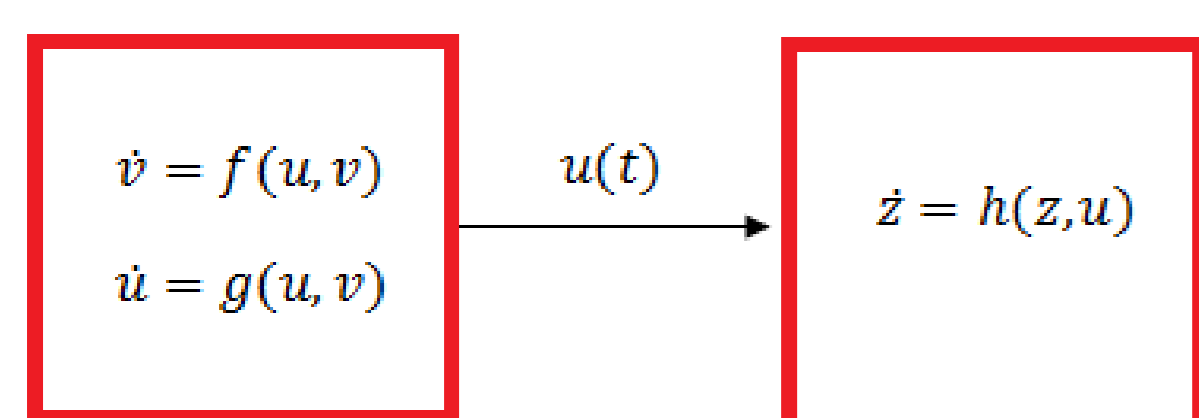


Figura 1 - Sistemas que operam na configuração mestre-escravo utilizando sinais caóticos podem entrar em sincronismo desde que satisfaçam certas propriedades. O subsistema mestre exerce influência sobre o comportamento dinâmico do subsistema escravo. Isso é possível através do compartilhamento de uma das variáveis do subsistema mestre. O subsistema escravo, portanto, não dependerá apenas de suas próprias variáveis, uma vez que receberá também uma variável do subsistema mestre.

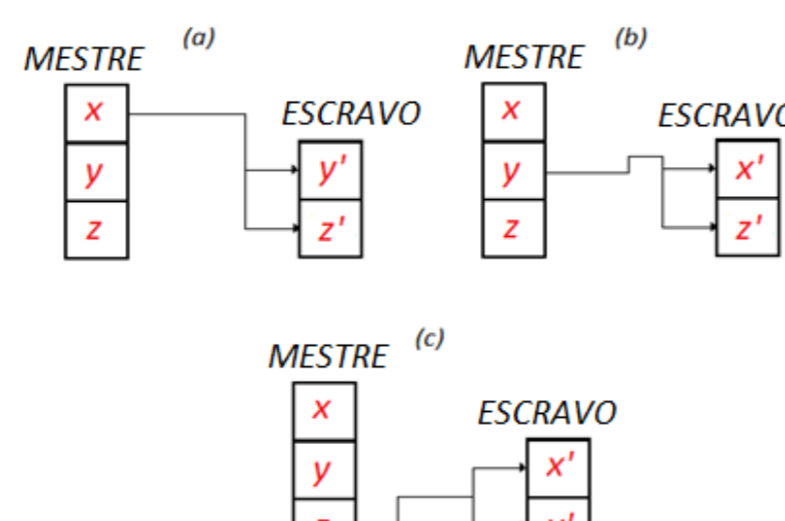


Figura 2 - Configurações mestre-escravo para sistema de Lorenz. (a) $x(t)$ é entrada do sistema escravo. (b) $y(t)$ é entrada do sistema escravo. (c) $z(t)$ é entrada do sistema escravo.

Para o estudo em questão, analisamos um sistema mestre-escravo homogêneo, isto é, na situação em que $f(\cdot) = h(\cdot)$.

Sistema Mestre:
$$\begin{cases} \dot{v} = f(u, v) \\ \dot{u} = g(u, v) \end{cases}$$

Sistema Escravo:
$$\begin{cases} \dot{u}' = u \\ \dot{v}' = f(u, v') \end{cases}$$

Como já mencionado, as simulações de sincronismo foram realizadas a partir do modelo de sistema mestre-escravo aplicado ao sistema de Lorenz, dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z \end{aligned}$$

onde β , σ e ρ são parâmetros variáveis do sistema. Cada uma das três variáveis, x , y e z , foram testadas como entrada.

A ideia básica do sistema de comunicação proposto por Cuomo e Oppenheim [3] é a adição da mensagem (sinal de informação) ao sinal caótico do sistema transmissor (mestre). Este método introduz erro de sincronismo entre os subsistemas que compõem a configuração mestre-escravo. O sistema transmissor opera em regime caótico. À variável do sistema escolhida como variável de transmissão soma-se a mensagem $m(t)$, que deve ter sido devidamente atenuada. O sinal transmitido, portanto, é dado por:

$$s(t) = x(t) + m(t)$$

Para realizar as simulações que serão exploradas a seguir, forma utilizadas as equações do sistema de Lorenz. A variável de transmissão no subsistema mestre foi $x(t)$.

$$\begin{aligned} \text{MESTRE} & \begin{cases} \dot{x}_M = \sigma(y_M - x_M) \\ \dot{y}_M = x_M(\rho - z_M) - y_M \\ \dot{z}_M = x_M y_M - \beta z_M \end{cases} \\ \text{ESCRAVO} & \begin{cases} \dot{x}_E = \sigma(y_E - x_E) \\ \dot{y}_E = (x_M + m(t)) \times (\rho - z_E) - y_E \\ \dot{z}_E = (x_M + m(t)) \times y_{ME} - \beta z_E \end{cases} \end{aligned}$$

Para recuperar a mensagem, no receptor, subtrai-se a variável $x_E(t)$ do sinal transmitido $s(t)$.

$$m'(t) = s(t) - x_E(t)$$

Os subsistemas mestre e escravo não entram em sincronismo perfeito, dado que o subsistema escravo recebe uma versão perturbada de $x(t)$. É para diminuir a interferência do sinal $m(t)$ no sincronismo entre os dois subsistemas que se atenua a mensagem, como já exposto. Para efeitos práticos, adotou-se a atenuação de 60 dB.

RESULTADOS

Os resultados obtidos para simulações de sincronismo mestre-escravo no sistema de Lorenz foram listados na Tabela 1. De acordo com os valores indicados, observa-se a ocorrência de sincronização entre o subsistema escravo e o subsistema mestre para entradas $x(t)$ e $y(t)$ atuando na dinâmica do escravo. Para a entrada $z(t)$ não ocorre sincronismo. A Fig. 3 representa os sinais $y(t)$ e $z(t)$ obtidos no sistema escravo a partir do sinal $x(t)$ calculado no sistema mestre. A Fig. 4 ilustra o erro de sincronismo nos dois sinais do subsistema escravo.

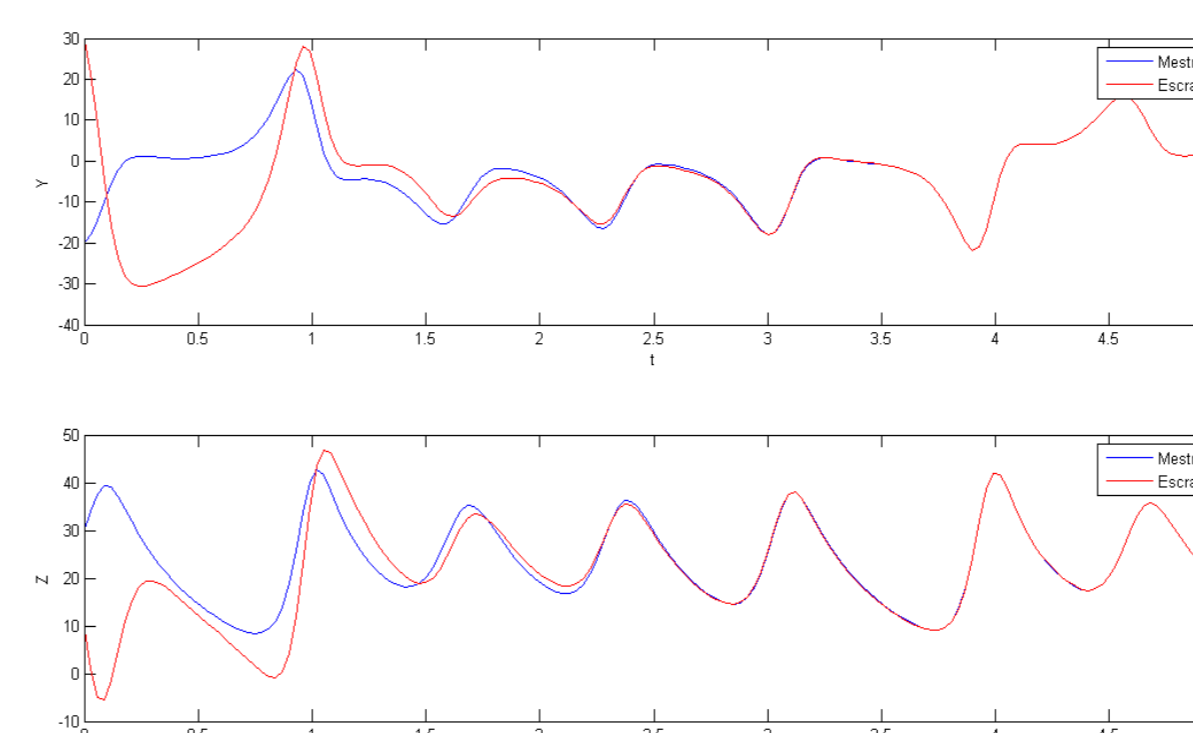


Figura 3 – Sinais $y(t)$ e $z(t)$ obtidos na simulação de sincronismo do sistema de Lorenz na configuração mestre-escravo com entrada $x(t)$.

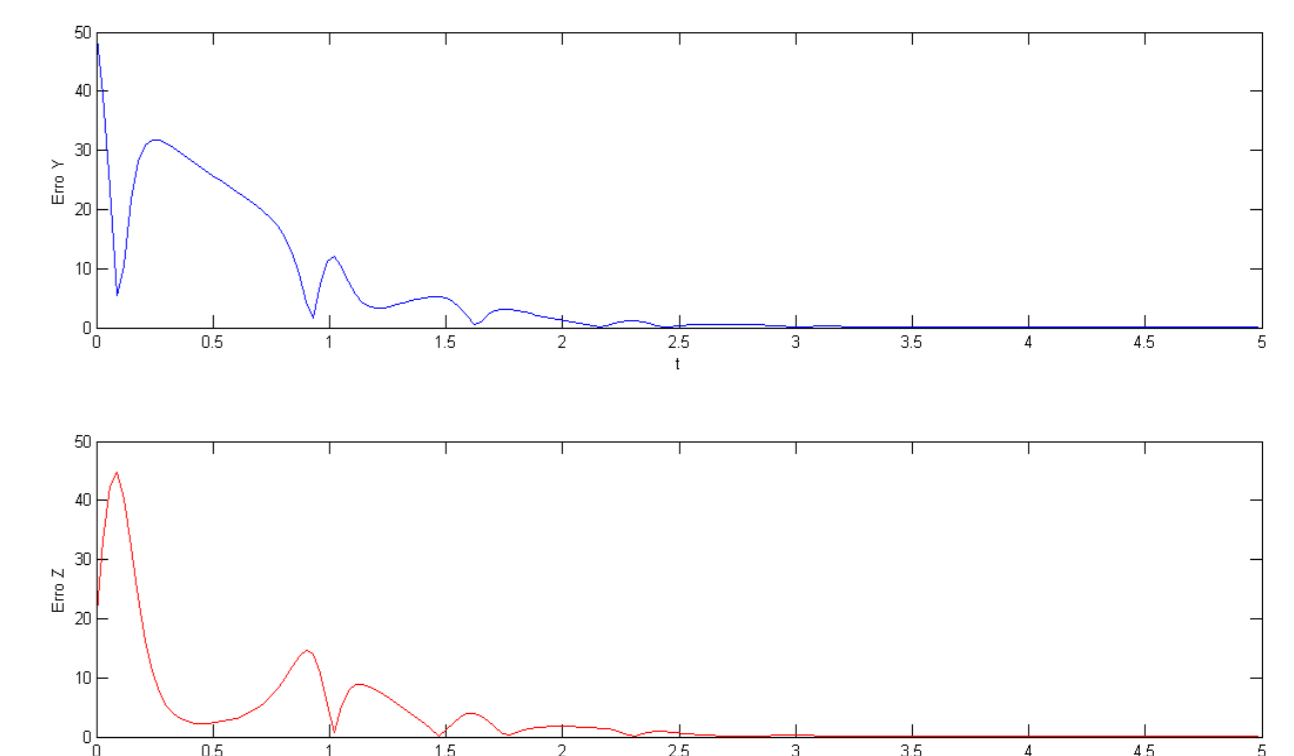


Figura 4 – Erro de sincronismo dos sinais $y(t)$ e $z(t)$ do sistema de Lorenz com entrada $x(t)$ no subsistema escravo.

Os erros quadráticos médios (EQMs) entre os sinais dos subsistemas mestre e escravo foram calculados conforme as equações a seguir.

$$EQM_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_M(i) - x_E(i))^2 \quad EQM_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_M(i) - y_E(i))^2 \quad EQM_z = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (z_M(i) - z_E(i))^2$$

TABELA 1 – Erro quadrático médio do sistema mestre-escravo

| Entrada | EQM _x | EQM _y | EQM _z |
|---------|--------------------------|------------------------|-------------------------|
| X(t) | ----- | 0.02341 | 0.01446 |
| Y(t) | 5.0025x10 ⁻²¹ | ----- | 3.2264x10 ⁻⁴ |
| Z(t) | 3.05630x10 ⁴ | 3.9684x10 ⁴ | ----- |

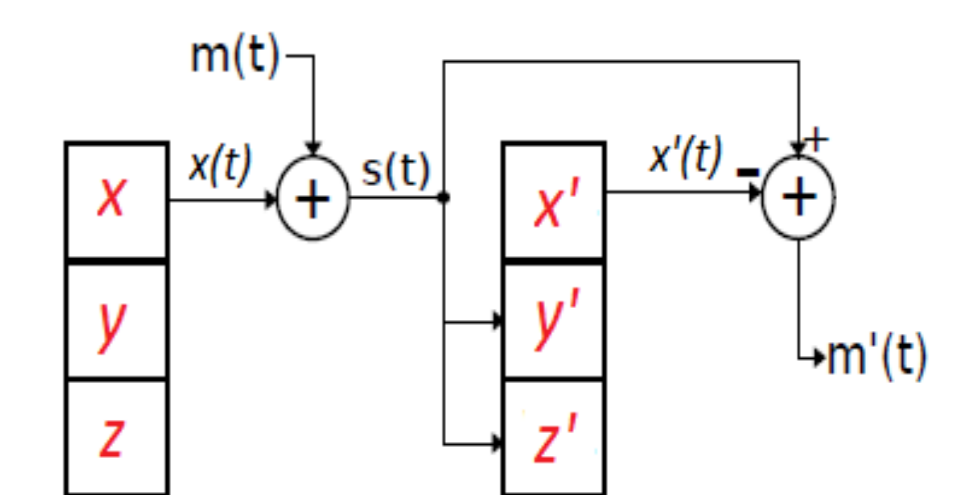


Figura 5 - Esquema do sistema de comunicação de Cuomo e Oppenheim.

As Figs. 7 e 8 ilustram alguns dos resultados obtidos para a transmissão de uma mensagem senoidal representada na Fig. 6.

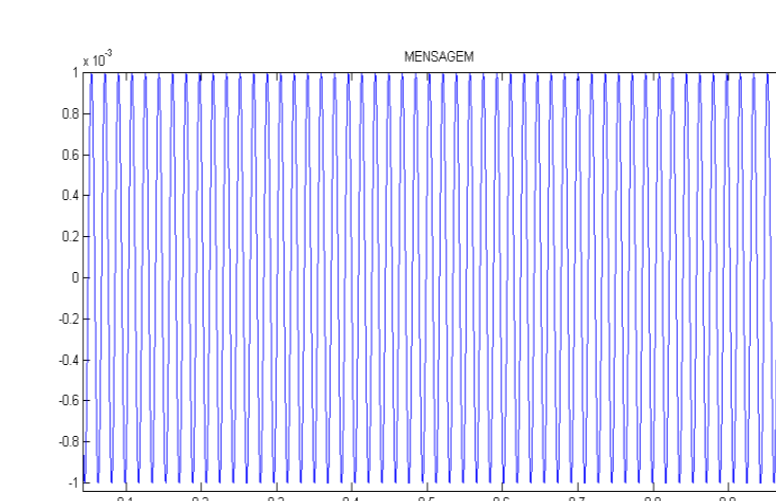


Figura 6 - Mensagem senoidal, $f=800\text{Hz}$, $A=10^{-60/20}$.

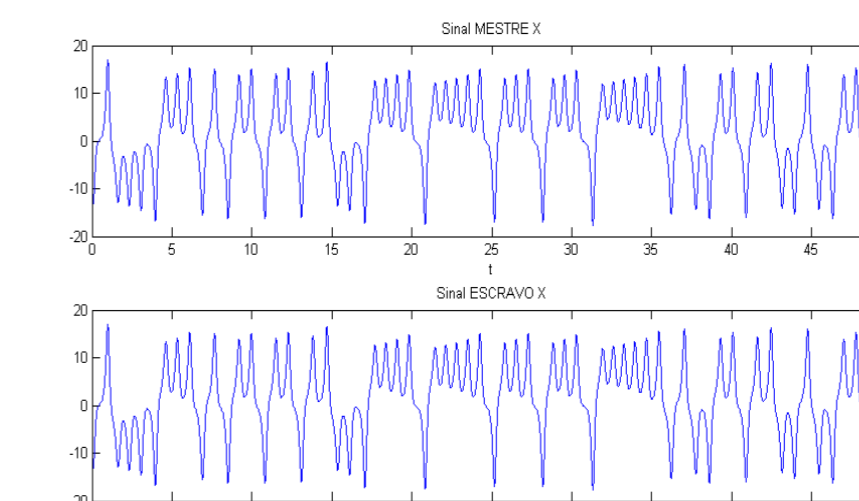


Figura 7 - Sinal $x(t)$ dos subsistemas mestre e escravo.

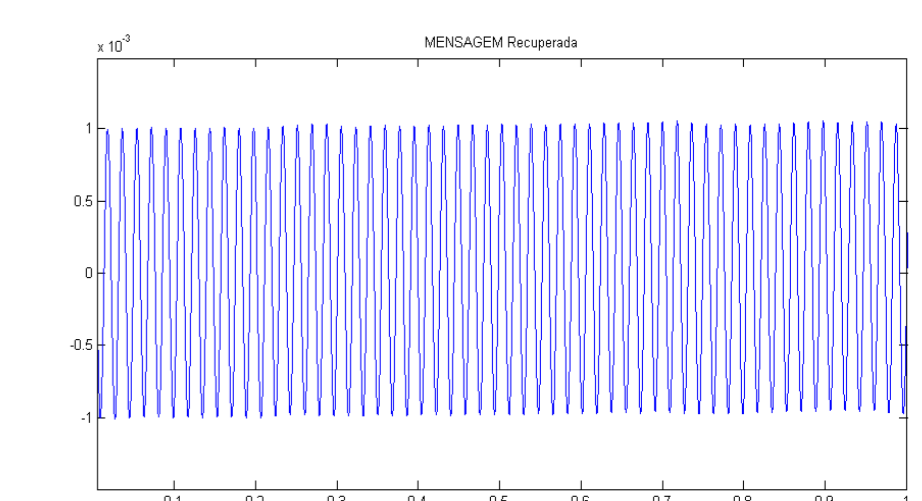


Figura 8 - Mensagem senoidal recuperada.

CONCLUSÕES

Foi exposto e analisado o conceito de sincronismo entre sistemas dinâmicos. Como exemplo de aplicação prática, tomou-se o sistema de comunicação analógica caótica proposto por Cuomo e Oppenheim [3], uma solução pioneira, mas apresenta problemas fundamentais do ponto de vista de robustez, mesmo num canal ideal. Como perspectivas de trabalhos futuros, apontamos o uso do método das dinâmicas clonadas para cálculo de expoentes de Lyapunov condicionais e a análise de sincronismo em sistemas neuronais.

REFERÊNCIAS

- [1] L. M. Pecora, T. L. Carroll, "Synchronization in Chaotic Systems", Physical Review Letters, Vol. 64, No. 8, pp. 821-824, 1990.
- [2] M. Eisenkraft, *Sistema de Comunicação Utilizando Sinais Caóticos*, Dissertação de Mestrado, USP, 2001.
- [3] K. M. Cuomo, A. V. Oppenheim, "Circuit Implementation of Synchronized Chaos with Applications to Communications", Physical Review Letters, Vol. 71, No. 1, pp. 65-68, 1993.
- [4] N. Fiedler-Ferrara, C. P. C. do Prado, *Caos: uma Introdução*, Editora Blücher, 1994.