TEOREMA DE BAIRE E APLICAÇÕES

Otávio Marçal Leandro Gomide (orientando)
otaviomleandro@hotmail.com

Ary Orozimbo Chiacchio (orientador)
ary@ime.unicamp.br

IMECC - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica - PIBIC - CNPq

Espaços Métricos - Continuidade - Sequência de Cauchy

Introdução

O Teorema de Baire é um resultado da Topologia Geral que tornou-se uma ferramenta em diversas áreas da Matemática, devido ao seu grande número de consequências. Em especial, na Análise Funcional, importantes resultados na teoria dos espaços de Banach são obtidos deste teorema, como o princípio da limitação uniforme, o teorema da aplicação aberta e o teorema do gráfico fechado. Neste projeto, estudamos a teoria básica dos espaços métricos e uma introdução à Topologia Geral e assim demonstramos o teorema de Baire e analisamos algumas de suas aplicações, em especial, a existência de uma função contínua não derivável em ponto algum.

Conceitos Básicos

Definição 1. *Um subconjunto S de um espaço topológico X é dito magro se S é uma reunião enumerável, i.e.,* $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n,$ *tal que para cada* $n \in \mathbb{N},$ $\overset{\circ}{\overline{S}} = \emptyset.$

Definição 2. *Dizemos que B é um espaço de Baire em um espaço topológico X se todo subconjunto magro de B tem interior vazio.*

Definição 3. *Dizemos que um espaço métrico M é completo se toda sequência de Cauchy converge em M.*

Teorema 1. ***(Teorema de Baire)*** *Todo espaço métrico completo é um espaço de Baire.*

Teorema 2. *O conjunto das funções* $f \in C[a, b]$ *que não possuem derivada em ponto algum de* $[a, b]$ *é um subconjunto denso de* $C[a, b]$.

Proposição 3. *Se* $a < x < b$ *e* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é derivável em x e* $a < \alpha_n < x < \beta_n < b \; \forall\, n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \to x$ *e* $\beta_n \to x$, *então:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x)$$

Proposição 4. *(Critério M de Weierstrass) Seja* $\sup_{x\in E} |u_k(x)| \leq M_k,\ k \in \mathbb{N},$ *e se* $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ *converge. Então* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *converge uniformemente em E.*

Teorema 5. *Se* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente para* $f : E \to \mathbb{R}$ *em E e* f_n *é contínua em* $a \in E$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *então f é contínua em a.*

Aplicação

Exemplo de uma função não derivável em ponto algum. Defina:

$$\phi(x) = \begin{cases} x \text{ se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x \text{ se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \tag{1}$$

Estenda a definição de ϕ para a reta real, e para isso faça $\phi(x) = \phi(x+2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Defina agora:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x) \tag{2}$$

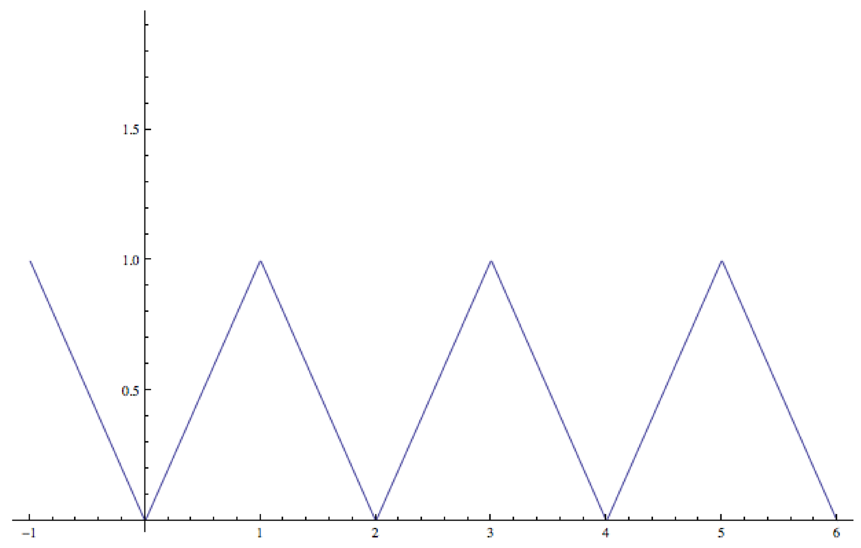

Figura 1: Gráfico da função ϕ

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x)$ é uma série convergente pelo critério de comparação, e portanto está bem definida.

Além disso, pelo critério M de Weierstrass, a série converge uniformemente.

Deste modo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x)$ é contínua em $\mathbb{R}$, pois cada termo da série é uma função contínua.

Fixe $x \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{Z}_+$, então existe k tal que $k \leq 4^m x \leq k + 1$, deste modo, defina:

$$\alpha_m = \frac{k}{4^m} \qquad \beta_m = \frac{k+1}{4^m} \tag{3}$$

Segue que: $|f(\beta_m) - f(\alpha_m)| \geq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^m$

Como $\beta_m - \alpha_m = 4^{-m}$, vem:

$$\left|\frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m}\right| \geq \frac{3^m}{2} \tag{4}$$

Note que $\alpha_m \leq x \leq \beta_m$ e $\beta_m - \alpha_m \to 0$

Pela proposição 3, se f é derivável em x temos que:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} = f'(x) \tag{5}$$

Mas pela inequação (4) temos que o limite esquerdo é infinito, o que gera em absurdo, logo f não é diferenciável em x.

Como x foi fixado arbitrariamente, f não é diferenciável em ponto algum.

Bibliografia

1. H. H. Domingues, Espaços métricos e introdução à topologia, Atual Editora, 1982.
2. A. C. Barreto, Tópicos de análise, IMPA, 1971.
3. E. L. Lima, Elementos de topologia geral, LTC, 1976.
4. N. Kühlkamp, Introdução à topologia geral, Editora da UFSC, 2002.