Introdução a Geometria Diferencial: Um estudo aplicado a Relatividade Geral

Orientanda: Patrícia Marçal — patriciaqmarcal@gmail.com
Orientador: Henrique N. Sá Earp — henrique.saearp@ime.unicamp.br
Departamento de Matemática - IMECC

Agência Financiadora: FAPESP
Palavras-Chave: *Geometria Diferencial - Relatividade Geral - Buracos Negros*

Introdução

O desenvolvimento da Geometria Diferencial associou-se a avanços notáveis em física, como a teoria da Relatividade de Einstein. Usamos este conhecimento para estudar a equação de campo de Einstein, a solução de Schwarzschild, e sua aplicação na descrição quantitativa de buracos negros.

Geometria Diferencial e Mecânica dos Fluidos

O tensor curvatura de Riemann é um campo de $\binom{1}{3}$-tensores , $R(X,Y)Z$, que mede a mudança em Z, após seu transporte paralelo ao longo quadrilátero fechado gerado por X e Y, dividido pela "área".

Definição 1. *Dadas as componentes do tensor curvatura de Riemann,* R^a_{bcd} *, e do tensor métrico,* g_{ab} *, o* $\binom{0}{2}$*-tensor curvatuva de Ricci é dado por* $R_{ab} = R^c_{acb}$ *, e o escalar de Ricci é* $R = g^{ab}R_{ab}$*. Assim, o tensor curvatura de Einstein é definido por* $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}$*.*

A matéria-energia pode ser descrita pelo $\binom{0}{2}$-tensor energia-momento T, simétrico e satisfazendo a lei de conservação $\nabla \cdot T = 0$.

Definição 2. *Um fluido perfeito, com densidade de massa* ρ*, pressão* p *e 4-velocidade* U*, não tem viscosidade e satisfaz* $p \ll \rho$*. O tensor energia-momento para este fluido é dado por* $T_{ab} = (\rho + p)U_aU_b - pg_{ab}$*.*

A dinâmica da matéria-energia pode ser modelada como o fluxo de um fluido perfeito no espaço-tempo.

Equação de Campo de Einstein

Lema 1. *Considere um referencial movendo-se conjuntamente com um fluido. Então,*

$$\rho \simeq (\lambda T_{ik} + (1-\lambda)g_{ik}T)U^iU^k\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

O espaço-tempo newtoniano, onde a física clássica ocorre, é uma variedade 4-dimensional galileana, caracterizada por tempo absoluto e seções espaciais euclidianas.

Lema 2. *Para um fluido em um espaço-tempo (localmente) newtoniano,*

$$\rho \simeq (2T_{ik} - 1g_{ik}T)U^iU^k. \tag{2}$$

O espaço-tempo relativístico é uma variedade pseudo-riemanniana 4-dimensional, localmente newtoniana, com assinatura de Lorentz $(+,-,-,-)$.

Os cones nulos em relação ao tensor métrico descrevem raios de luz, e geodésicas temporais descrevem movimentos "livres de força".

Teorema 1. *A equação de campo de Einstein é:*

$$G_{ik} = -8\pi\mathcal{G}T_{ik} \tag{3}$$

em que $\mathcal{G}$ *é a constante de gravitação universal.*

Ou seja, a presença de matéria-energia é proporcional à curvatura da variedade, interpretada como campo gravitacional.

Solução de Schwarzschild

Lema 3. *Sejam* (t,r,θ,ϕ) *as coordenadas esféricas em um referencial distante de um dado corpo massivo. Uma solução local, estática e esfericamente simétrica da equação de campo de Einstein tem a forma*

$$ds^2 = e^{2F(r)}dt^2 - e^{2H(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2$$

onde $F(r)$ *e* $H(r)$ *devem ser determinadas por* (3)*.*

Teorema 2. *A solução de Schwarzschild*

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mathcal{G}M}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2\mathcal{G}M}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 - \sin^2\theta d\phi^2) \tag{4}$$

é uma solução estática e esfericamente simétrica para a equação (3)*, onde* M *é a massa do corpo e* $c = 1$*.*

Buracos Negros

Suponha um corpo esférico com raio R e rotação desprezível. Se $R < 2\mathcal{G}M$, então há uma singularidade em $r = 2\mathcal{G}M$ na solução de Schwarzschild.

Como estamos interessados na componete radial, podemos supor $d\theta = d\phi = 0$ e estudar uma superfície com coordenadas (t,r) e métrica

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mathcal{G}M}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2\mathcal{G}M}{r}\right)^{-1}dr^2.$$

As equações geodésicas associadas são:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2t}{du^2} + \dfrac{2\mathcal{G}M}{r(r-2\mathcal{G}M)}\left(\dfrac{dt}{du}\right)\left(\dfrac{dr}{du}\right) = 0 \\ \dfrac{d^2r}{du^2} + \dfrac{\mathcal{G}M(r-2\mathcal{G}M)}{r^3}\left(\dfrac{dt}{du}\right)^2 - \dfrac{\mathcal{G}M}{r(r-2\mathcal{G}M)}\left(\dfrac{dr}{du}\right)^2 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Para r suficientemente próximo de $2\mathcal{G}M$, a geodésica que obtemos é dada por

$$r(t) = 2\mathcal{G}M - \exp\left(\frac{-t}{2\mathcal{G}M}\right) \quad \text{se } r < 2\mathcal{G}M \tag{6}$$

$$r(t) = 2\mathcal{G}M + \exp\left(\frac{-t}{2\mathcal{G}M}\right) \quad \text{se } r > 2\mathcal{G}M \tag{7}$$

Para $r < 2\mathcal{G}M$, ainda que $t \longrightarrow \infty$, nem mesmo a luz atravessa o horizonte de eventos $r = 2\mathcal{G}M$. Consequentemente, nada desta região é percebido por um observador distante.

Para $r > 2\mathcal{G}M$, a aproximação encontrada sugere a representação deste corpo como um "funil".

Trata-se, de fato, de um ***buraco negro*** de Schwarzschild!

Graficamente, a métrica degenera como um "funil hiperbólico". Fixando $\mathcal{G}M = 1$, representamos as coordenadas (t,r,θ) da solução na presente figura de fundo.

Bibliografia

[1] M. P. do Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, SBM (2008).

[2] J. Stewart, *Advanced General Relativity*, Cambridge University Press (1991).