Tópicos de Análise

William Depetri – Bolsista
Ary Orozimbo Chiacchio – Orientador

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas
PIBIC/UNICAMP

Resumo

A Análise é uma das grandes áreas da Matemática. Nesse projeto, desenvolvemos um programa de tópicos que proporcionou ao aluno as ferramentas necessárias para provar alguns resultados importantes em Teoria da Aproximação e suas aplicações.

Introdução

Neste projeto, desenvolvido na área da Análise, estudamos os espaços métricos e sua topologia, funções contínuas, e algumas aplicações, como o Teorema da Melhor Aproximação em espaços com produto interno, e o Teorema da Melhor Aproximação de Weierstrass.

Conceitos Básicos

Definição:

Sejam $\mathbf{M}$ um conjunto aberto não-vazio, e d uma função de $\mathbf{M} \times \mathbf{M}$ com as seguintes propriedades:

1. $d(x,y) \geq 0$
2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y); \forall x,y,z \in \mathbf{M}$

Então d é uma métrica e $(\mathbf{M}, d)$ é chamado Espaço Métrico.

Definição

Sejam $\mathbf{E}, \mathbf{F}$ espaços métricos sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma Transformação Linear é uma função $\mathbf{T}: \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ que cumpre as seguintes condições:

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$
2. $T(\alpha u) = \alpha T(u); \forall u,v \in \mathbf{E}; \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Sejam $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$ Espaços Métricos:

- Uma função $f: \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ é contínua em $p \in \mathbf{M}$ se, dado $\varepsilon > 0$, existr $\delta > 0$ tal que $d(x,p) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(p)) < \varepsilon$. Dizemos que f é contínua se o for em todos os pontos de $\mathbf{M}$.
- Uma função $f: \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ é uniformemente contínua se, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon \forall x,y \in \mathbf{M}$.
- Uma função $f: \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ é lipschitziana se existir uma constante $c > 0$ (chamada constante de lipschitz) tal que:

$$d(f(x), f(y)) \leq c d(x,y); \forall x,y \in \mathbf{M}$$

Alguns Resultados

- Sejam d_1 e d_2 métricas sobre $\mathbf{M}$ para as quais existem $r,s \in \mathbb{R}; r,s > 0$, tais que:

$$r d_1(x,y) \leq d(x,y) \leq s d_2(x,y)$$

quaisquer que sejam $x,y \in \mathbf{M}$. Então $f: (\mathbf{M}, d) \to (\mathbf{N}, d')$ é uniformemente contínua $\Leftrightarrow f: (\mathbf{M}, d_1) \to (\mathbf{N}, d')$ é uniformemente contínua.

- (Continuidade por sequências) Uma função $f: \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ é contínua em $p \in \mathbf{M}$ se, e somente se, $(x_n) \subset \mathbf{M}$ tal que $x_n \to p \Rightarrow f(x_n) \to f(p)$
- Se $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$ são espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{R}$ e se $T: \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ é uma transformação linear, então são equivalentes as seguintes afirmações:

a) T é contínua;

b) T é contínua na origem;

c) Existe um número real $k > 0$ tal que $\|T(u)\| \leq k\|u\|, \forall u \in \mathbf{E}$;

d) T é Lipschitziana

Resultado Importante

Teorema da Aproximação de Weierstrass:

Seja f uma função contínua definida em um intervalo fechado [a,b]. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe um polinômio p com coeficientes constantes reais tal que $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in [a,b]$.
Para tanto, utilizamos os Polinômios de Bernstein de grau n associado à função $f(x)$, definidos por:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(\frac{i}{n}) B_i^n(x)$$

onde

$$B_i^n = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$$

Aplicação

Espaços com Produto Interno:

Num Espaço Vetorial $\mathbf{E}$ sobre $\mathbb{R}$, dotado de um produto interno $(u,v) \to < u,v >$, podemos definir a norma de um vetor $u \in \mathbf{E}$ do seguinte modo:

$$\|u\|^2 = < u,u >$$

Definição

Um conjunto de vetores num espaço com produto interno é ortogonal se os vetores o forem dois a dois. Se a norma de cada vetor de um conjunto ortogonal for igual a 1, o conjunto é ortonormal.

- Se $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base ortonormal de um espaço com produto interno $\mathbf{V}$ e u é um vetor qualquer de V, então:

$$u = < u,v_0 > v_0 + < u,v_1 > v_1 + \ldots + < u,v_n > v_n$$

- Todo espaço vetorial com produto interno $\mathbf{E}$ é um espaço vetorial mado. Assim, podemos definir em $\mathbf{E}$ a seguinte métrica:

$$d(u,v) = \|u - v\|; \forall u,v \in \mathbf{E}$$

Definição:

Se $\mathbf{W}$ é um subespaço de dimensão finita de um espaço com produto int V, se $\{v_o, v_1, \ldots, v_r\}$ é uma base ortonormal de $\mathbf{W}$ e se u é um vetor qual de V, então a projeção ortogonal de $u \in V$ sobre $\mathbf{W}$ é o vetor

$$proj_w u = < u,v_0 > v_0 + < u,v_1 > v_1 + \ldots + < u,v_r > v_r$$

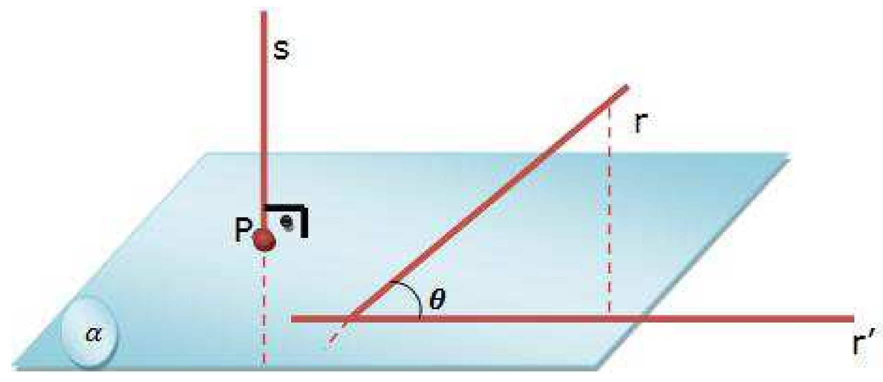

Figura 1: Esquema representativo de uma projeção ortogonal. Figu retirada de www.colegioweb.com.br.

Teorema de Melhor Aproximação

Se $\mathbf{W}$ é um subespaço de dimensão finita de um espaço com produto int V, então $proj_w u$ é a melhor aproximação de u em $\mathbf{W}$, no seguinte senti

$$\|u - proj_w u\| \leq \|u - w\|; \forall w \in \mathbf{W}$$

Bibliografia

1. H.H., Domingues. Espaços Métricos e Introdução à Topologia. A Editora, 1982.
2. A.C., Barreto. Tópicos de Análise. IMPA, 1971.
3. G.F., Simmons. Introduction to Topology and Modern Analysis. Graw Hill, 1963.
4. E. Kreyszig. Introduction to Functional Analysis with Aplication Willey, 1978.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer ao CNPq pelo suporte financeiro.