INTRODUÇÃO À TEORIA DE REPRESENTAÇÕES

Aluno: Luan Pereira Bezerra
bezerra.luan@gmail.com

Orientador: Adriano Adrega de Moura
aamoura@ime.unicamp.br

UNICAMP

IMECC

IMECC
PICME/CNPq

Palavras-Chave: Teoria de Representações - Caracteres - Grupos finitos

Introdução

O estudo da teoria de representações começou em 1896 com o trabalho do matemático alemão F. G. Frobenius. Atualmente esta área de pesquisa possui importantes aplicações, desde teoria dos números e geometria até redes de comunicações e mecânica quântica. Iniciamos o estudo dirigido com uma introdução à teoria básica de estruturas algébricas (grupos, anéis, corpos, etc.) e após a aquisição dos conceitos necessários estudamos a teoria básica de representações de álgebras, com ênfase em grupos finitos. Os principais resultados estudados foram o lema de Schur, o teorema de Maschke e o cálculo de tabelas de caracteres para alguns grupos.

Conceitos Fundamentais em Representações

Definição 1. *A característica de um corpo $\mathbb{F}$ é o menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $n.1 = 0$. Se tal n não existe então a característica de $\mathbb{F}$ é 0. Aqui, $\mathbb{F}$ terá sempre característica 0.*

Definição 2. *Uma $\mathbb{F}$-**álgebra** associativa com identidade é um espaço vetorial A com uma operação binária (multiplicação) $*$ bilinear tal que:*
i) $a * (b * c) = (a * b) * c$, $\forall a, b, c \in A$;
ii) $\exists\, 1 \in A$ tal que $1 * a = a * 1 = a$, $\forall a \in A$.

Exemplo 3. *A álgebra $\mathbb{F}[G]$ de um grupo G (com operação *) é o conjunto formado pelas combinações lineares de elementos de G com coeficientes em $\mathbb{F}$, i.e,*

$$\mathbb{F}[G] = \{\sum_{g \in G} a_g g, a_g \in \mathbb{F}\}$$

(se G é infinito, $a_g \neq 0$ somente para um número finito de elementos), onde o produto é dado por

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) * \left(\sum_{h \in G} b_h h\right) = \sum_{g \in G;\, h \in G} (a_g b_h)\, g * h.$$

Definição 4. *Uma **representação** de uma álgebra A em um espaço vetorial V é um homomorfismo de álgebras $\rho :\ A \longrightarrow EndV$.*

Exemplo 5. *Uma representação de $A = \mathbb{F}[G]$ em um espaço vetorial V é o mesmo que uma representação de G, i.e, um homomorfismo $\rho :\ A \longrightarrow Aut(V)$, onde $Aut(V) = GL(V)$ denota o grupo de operadores lineares invertíveis de V.*

Definição 6. *Uma **subrepresentação** de uma representação V é um subespaço $W \subset V$, $\rho(A) - invariante$, i.e, invariante sob todos os operadores $\rho(a) : V \longrightarrow V$, $a \in A$.*

Definição 7. *Uma representação $\rho \neq 0$ de A em V é **irredutível** (ou **simples**) se as únicas subrepresentações de V são 0 e V.*

Definição 8. *Sejam ρ_1 e ρ_2 duas representações de uma álgebra A em V_1 e V_2, respectivamente. Um **homomorfismo** de representações $\phi : V_1 \longrightarrow V_2$ é um operador linear que comuta com ρ, i.e., $\phi(\rho(a)v) = \rho(a)\phi v$, para todo $v \in V_1$ e $a \in A$.*

Proposição 9. (Lema de Schur) *Sejam ρ_1 e ρ_2 representações de uma álgebra A em V_1 e V_2, respectivamente. Seja $\phi : V_1 \longrightarrow V_2$ um homomorfismo de representações não nulo. Então:*

i) Se ρ_1 é irredutível, ϕ é injetivo.
ii) Se ρ_2 é irredutível, ϕ é sobrejetivo.

Demonstração: i) $ker(\phi)$ é uma subrepresentação de ρ_1. Como $\phi \neq 0$, esta representação não pode ser ρ_1. Então, como ρ_1 é irredutível, temos que $ker(\phi) = 0$. Logo, ϕ é injetivo.
ii) $Im(\phi)$ é uma subrepresentação de ρ_2. Como $\phi \neq 0$, esta representação não pode ser 0. Então, como ρ_2 é irredutível, temos que $Im(\phi) = V_2$. Logo, ϕ é sobrejetivo.

□

Corolário 10. *Seja ρ uma representação irredutível de dimensão finita de uma álgebra A sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{F}$, e seja $\phi : V \longrightarrow V$ um homomorfismo de representações. Então $\phi = \lambda \cdot Id$ para algum $\lambda \in \mathbb{F}$.*

Corolário 11. *Seja A uma álgebra comutativa. Então toda representação de dimensão finita irredutível ρ de A é 1-dimensional.*

Demonstração: Seja ρ uma representação irredutível de A em V. Para todo elemento $a \in A$, o operador $\rho(a) : V \longrightarrow V$ é um homomorfismo de representações, i.e., $\rho(av) = a\rho(v), \forall\, v \in V$.
De fato,

$$\rho(a)\rho(b)v = \rho(ab)v = \rho(ba)v = \rho(b)\rho(a)v.$$

Então, pelo lema de Schur, $\rho(a)$ é um operador escalar para qualquer $a \in A$. Daí, todo subespaço de V é uma subrepresentação. Mas ρ é irredutível, então 0 e V são os únicos subespaços de V. Isto implica que $dim\ V = 1$. □

Definição 12. *Uma representação ρ de uma álgebra A em V é dita decomponível se ρ pode ser escrita como uma soma direta de subrepresentações não nulas. Caso contrário, ρ é dita indecomponível. Observe que irredutível implica indecomponível.*

Teorema 13. *(Krull-Schmidt) Qualquer representação de dimensão finita de A pode ser decomposta de forma única (a menos de isomorfismo e ordem das parcelas) em uma soma direta de representações indecomponíveis.*

Teorema 14. *(Maschke) Sejam V uma representação de um grupo G. Se W é uma subrepresentação de V, então existe uma subrepresentação W' de V tal que $V = W \oplus W'$.*

Corolário 15. *Seja V uma representação de um grupo G. Então, $V = \bigoplus W_i$, onde W_i é uma representação irredutível.*

Caracteres

Definição 16. *Seja A uma álgebra e ρ uma representação de dimensão finita de A em V. Então o caracter de V é o funcional linear: $\chi_\rho : A \longrightarrow \mathbb{F}$ dado por: $\chi_\rho(a) = Tr(\rho(a))$*

Teorema 17. *Caracteres de representações irredutíveis de dimensão finita (não isomorfas) de A são linearmente independentes.*

Proposição 18. *Toda representação de G é determinada pelo seu caracter se $\mathbb{F}$ possui característica 0. Mais precisamente, $\chi_{\rho_V} = \chi_{\rho_W}$ implica V isomorfo a W.*

Proposição 19. *Dados V e W espaços vetoriais, seja $V \otimes W$ seu produto tensorial. Sejam ρ_V e ρ_W representações de um grupo G em V e W, respectivamente. Então, $\rho_{V \otimes W}$ é uma representação em $V \otimes W$, onde*

$$\rho_{V \otimes W}(g) = \rho_V(g) \otimes \rho_W(g),\ g \in G$$

Portanto,

$$\chi_{\rho_{V \otimes W}}(g) = \chi_{\rho_V}(g)\chi_{\rho_W}(g),\ g \in G$$

Definição 20. *Seja G um grupo e $a \in G$. Então o conjunto $C(a) = \{xax^{-1} : x \in G\}$ é a clase de conjugação de a.*
Observe que o valor de $\chi_\rho(g)$ depende apenas da classe de conjugação de g, pois $\chi_\rho(xgx^{-1}) = \chi_\rho(g)$

Lema 21. *O número de representações irredutíveis não isomorfas de um grupo finito G é igual ao número de classes de conjugação de G. E se V_i são todas as representações irredutíveis não isomorfas de G, então*

$$|G| = \sum dim(V_i)^2$$

.

Os caracteres de todas as representações irredutíveis não isomorfas de um grupo finito podem ser arranjados em uma tabela com as classes de conjugação como as colunas e os caracteres como as linhas. Mais precisamente, a primeira linha na tabela contém os representantes das classes de conjugação, a segunda o número de elementos em cada classe e as demais os valores dos caracteres em cada classe de conjugação.
A tabela de caracteres na maioria dos casos contém informações suficientes para identificar o seu grupo. Entretanto, existem casos de grupos não isomorfos mas que possuem a mesma tabela de caracteres, como é o caso do grupo dos quatérions (Q_8, definido abaixo) e do grupo de simetrias do quadrado (ou grupo diedral, D_4).

Exemplo 22. *Seja $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ o grupo dos quatérnions, definido pelas relações:*

$$i = jk = -kj,\ j = ki = -ik,\ k = ij = -ji,\ -1 = i^2 = j^2 = k^2.$$

As cinco classes de conjugação são $\{1\}, \{-1\}, \{\pm i\}, \{\pm j\}, \{\pm k\}$, então existem cinco representações irredutíveis não isomorfas. Como a soma dos quadrados das dimensões deve ser 8, uma delas terá dimensão 2 e as demais dimensão 1.
Sua tabela de caracteres é

Q_8	1	-1	i	j	k
#	1	1	2	2	2
$\mathbb{C}_{++}$	1	1	1	1	1
$\mathbb{C}_{+-}$	1	1	1	-1	-1
$\mathbb{C}_{-+}$	1	1	-1	1	-1
$\mathbb{C}_{--}$	1	1	-1	-1	1
$\mathbb{C}_2$	2	-2	0	0	0

A representação de dimensão 2 é dada por

$$\rho(-1) = -Id \qquad \rho(j) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}$$

$$\rho(i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho(k) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Estas são as matrizes de Pauli, que surgem em mecânica quântica.

Referências

[1] Etingof, P.I., et. al. (2011) *Introduction to Representation Theory*, Student Mathematical Library, Vol.59, AMS.

[2] Hungerford, Thomas. W. (2000) *Algebra*, GTM, Vol.73, Springer.