O Teorema Egrégio de Gauss e a Isometria entre o Catenóide e o Helicóide

Autor: Vladmir Sicca Gonçalves v083067@dac.unicamp.br
Orientador: Prof. Dr. Henrique Sá Earp henrique.saearp@ime.unicamp.br
Unidade: Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Financiadora: Fapesp
Palavra-Chave: Geometria Diferencial – Teorema Egrégio - Isometria

INTRODUÇÃO:

O Teorema Egrégio de Gauss afirma que a curvatura gaussiana de uma superfície regular é invariante por isometrias. Neste pôster apresentamos uma demonstração sucinta do teorema e exploramos uma isometria conhecida entre o helicóide e o catenóide.

Seja S uma superfície regular com parametrização local $\Phi(x_1, x_2)$. Definimos:

$$E := \langle \Phi_{x_1}, \Phi_{x_1} \rangle \qquad F := \langle \Phi_{x_1}, \Phi_{x_2} \rangle \qquad G := \langle \Phi_{x_2}, \Phi_{x_2} \rangle$$

Definimos também a aplicação de Gauss:

$$N : S \to S^2 \text{ com } N(x_1, x_2) = \frac{\Phi_{x_1} \times \Phi_{x_2}}{|\Phi_{x_1} \times \Phi_{x_2}|}$$

Que é diferenciável com $dN_p : T_p S \to T_p S$ linear e auto-adjunta.Sejam:

$$e := \langle -N_{x_1}, \Phi_{x_1} \rangle \qquad f := \langle -N_{x_1}, \Phi_{x_2} \rangle \qquad g := \langle -N_{x_2}, \Phi_{x_2} \rangle$$

Definimos a curvatura gaussiana:

$$K(p) := det(dN_p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Por fim, temos os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k:

$$\Phi_{x_i x_j} = \Gamma_{ij}^1 \Phi_{x_1} + \Gamma_{ij}^2 \Phi_{x_2} + L_{ij} N, i, j \in \{1, 2\}$$

COORDENADAS PSEUDO-NORMAIS:

Como $\Phi(x_1, x_2)$ é difeomorfismo, podemos supor

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x_1, x_2)} \neq 0$$

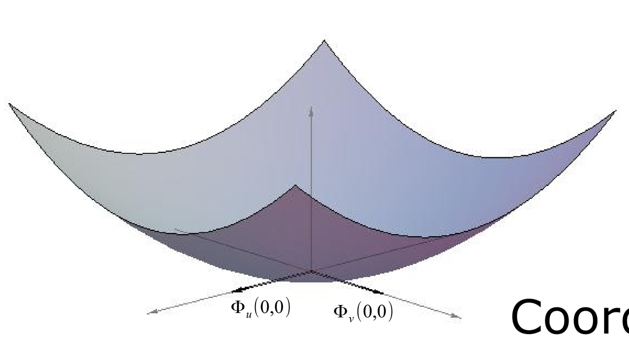
Daí, aplicando o teorema da função inversa à projeção no plano xy, temos a parametrização local:

$$\Psi(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

A parametrização pelo plano tangente (coordenadas pseudo-normais).

Em (0,0), como $\Phi_u = \Phi_v = 0$:

$$E = G = 1 \qquad F = 0 \qquad \Gamma_{ij}^k = 0, \ \forall i, j, k \qquad (1)$$



Coordenadas Pseudo-normais

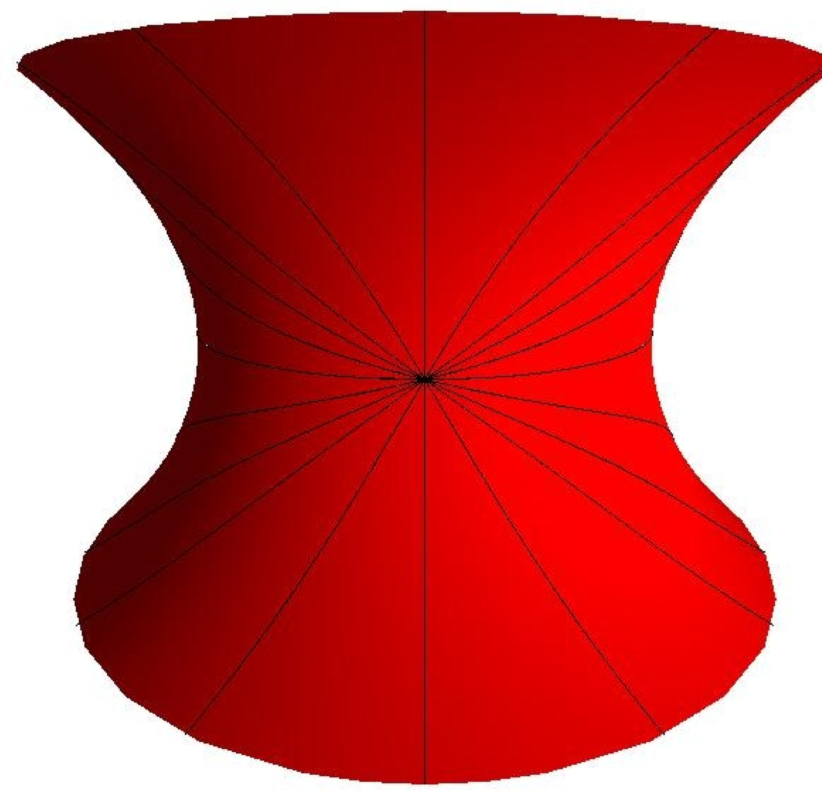
PROVA DO TEOREMA EGRÉGIO:

Segue de (1) que:

$$0 = \langle 0, \Phi_v \rangle = \langle ((\Phi_u)_{uv} - (\Phi_u)_{vu}), \Phi_v \rangle = (\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u - eg + f^2$$

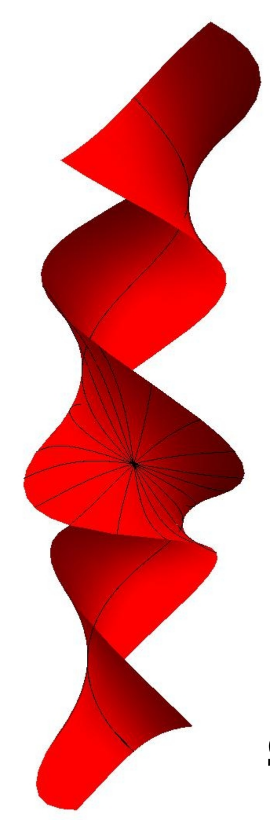
$$\Rightarrow K = \frac{(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u}{EG - F^2}$$

Depende apenas da primeira forma fundamental. C.Q.D.

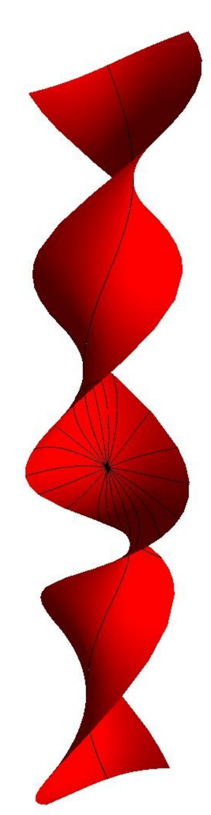


$\Omega(0)(u, v)$
Catenóide

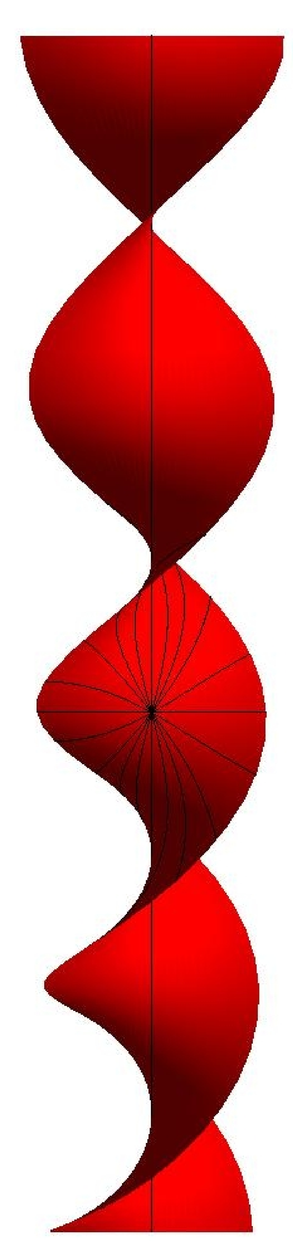
$\Omega(\frac{\pi}{8})(u, v)$



$\Omega(\frac{\pi}{4})(u, v)$



$\Omega(3\frac{\pi}{8})(u, v)$



$\Omega(\frac{\pi}{2})(u, v)$
Helicóide

Feito no Wolfram Mathematica 9

CATENÓIDE E HELICÓIDE:

Para uma isometria entre superfícies, buscamos parametrizações Φ e $\overline{\Phi}$ cujos coeficientes da primeira forma fundamental coincidam. As equações diferenciais que surgem para o helicóide

$$\Phi(u, v) = (r_1(v) cos\, u, r_1(v) sen\, u, v)$$

e para a superfície de revolução

$$\overline{\Phi}(u, v) = (r_2(v) cos\, u, r_2(v) sen\, u, k.u)$$

têm solução, única a menos de movimento rígido:

$$r_1(v) = k.senh\frac{v}{k} \qquad r_2(v) = k.cosh\frac{v}{k}$$

Então a única superfície de revolução isométrica ao helicóide é o catenóide, e a isometria é $\Phi^{-1} \circ \overline{\Phi}$.

O catenóide e o helicóide são superfícies mínimas ($H \equiv 0$) com parametrizações isotérmicas, i.e. E=G e F=0. Se fazemos mudanças de parâmetros no helicóide e no catenóide para termos, respectivamente:

$$\Psi(u, v) = \left(k\, senh(v) sen\, u, k\, senh(v) cos\, u, k.\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)$$

$$\overline{\Psi}(u, v) = (k\, cosh(v) cos\, u, k\, cosh(v) sen\, u, k.v)$$

as funções coordenadas correspondentes nas duas parametrizações são conjugadas harmônicas. Segue que as superfícies são isométricas e existe uma família de superfícies mínimas isométricas a ambas:

$$\Omega(t)(u, v) = (sen\ \ t)\Psi + (cos\ \ t)\overline{\Psi}$$

CONCLUSÕES:

O conhecimento da isometria entre o catenóide e o helicóide permitiu reduzir o problema das geodésicas no helicóide ao mesmo problema em uma superfície de revolução, cujos métodos já são bem conhecidos. O resultado geral para a geodésica na carta foi uma integral elíptica:

$$u = \int \frac{K}{k} \frac{1}{\sqrt{k^2 cosh^2 \frac{v}{k} - K^2}} dv \qquad , K \in \mathbb{R}$$

Requerendo o uso de métodos computacionais para sua visualização.

AGRADECIMENTOS:

À FAPESP pelo suporte finenceiro, ao Prof. Henrique Sá Earp pela orientação e apoio. Aos amigos que ajudaram, em particular aos colegas do GTAG, cobaias de grande parte desta exposição.

REFERÊNCIA:

CARMO, M. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. SBM. Rio de Janeiro, 2010