Introdução aos bilhares quânticos

Carolina Arruda Moreira
Instituto de Física Gleb Wataghin
Universidade Estadual de Campinas
carolm@ifi.unicamp.br

Alberto Saa
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas
asaa@ime.unicamp.br

Introdução

Bilhares dinâmicos são sistemas correspondentes ao movimento inercial de uma massa pontual numa dada região que possui uma porção suave na fronteira, onde as colisões elásticas são realizadas e é válida a Lei de Snell. Os modelos de bilhares são sistemas hamiltonianos com potencial $V(q)$ dado pela forma:

$$V(q) = \begin{cases} 0 & \text{se } q \in \Gamma \\ \infty & \text{se } q \notin \Gamma. \end{cases}$$

Neste trabalho estudamos os bilhares no contexto da mecânica quântica e abordamos a formulação matemática do problema, expondo a equação de Schrödinger independente do tempo no domínio Γ do bilhar. Revisamos também os artigos referentes à chamada conjectura de Percival [1, 2].

Bilhares quânticos

Na mecânica quântica, o estado de uma partícula é especificado por uma função de onda, uma vez que não há mais o conceito de trajetória, devido ao princípio da incerteza de Heinsenberg. No contexto dos bilhares quânticos, faz-se necessário encontrar soluções da equação de Schrödinger no domínio da mesa de bilhar; para isso, basta determinar seus autovalores e autovetores.

A equação de Schrödinger independente do tempo pode ser escrita como segue:

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi_n(\mathbf{q}) = -E_n \phi_n(\mathbf{q}), & \mathbf{q} \in \Gamma \\ \phi_n(\mathbf{q}) = 0, & \mathbf{q} \in \partial\Gamma, \end{cases} \tag{1}$$

onde adotamos $\hbar = 2m = 1$ e ∇^2 é o operador Laplaciano.

Escrevemos a probabilidade de se encontrar partícula no interior de um dado domínio $D \subseteq \Gamma$ como:

$$\int_D |\phi(\mathbf{q})|^2 d\mathbf{q}. \tag{2}$$

De forma geral, resolver a equação (1) analiticamente é complicado; quando isso não é possível, buscam-se métodos numéricos, a fim de calcular os autovalores e autovetores através de simulações computacionais.

Conjectura de Percival

No limite semiclássico, o espectro de energia quântico de um sistema dinâmico de N graus de liberdade apresenta duas regiões cujas propriedades são extremamente opostas: uma parte é regular enquanto a outra é caótica. Este fato foi conjecturado por Percival, em 1973 [1]. Diz-se que tal sistema, a nível clássico, exibe dinâmica mista: regiões regulares dominadas por toros e regiões caóticas; ambas coexistem no espaço de fase do sistema (fig. 1).

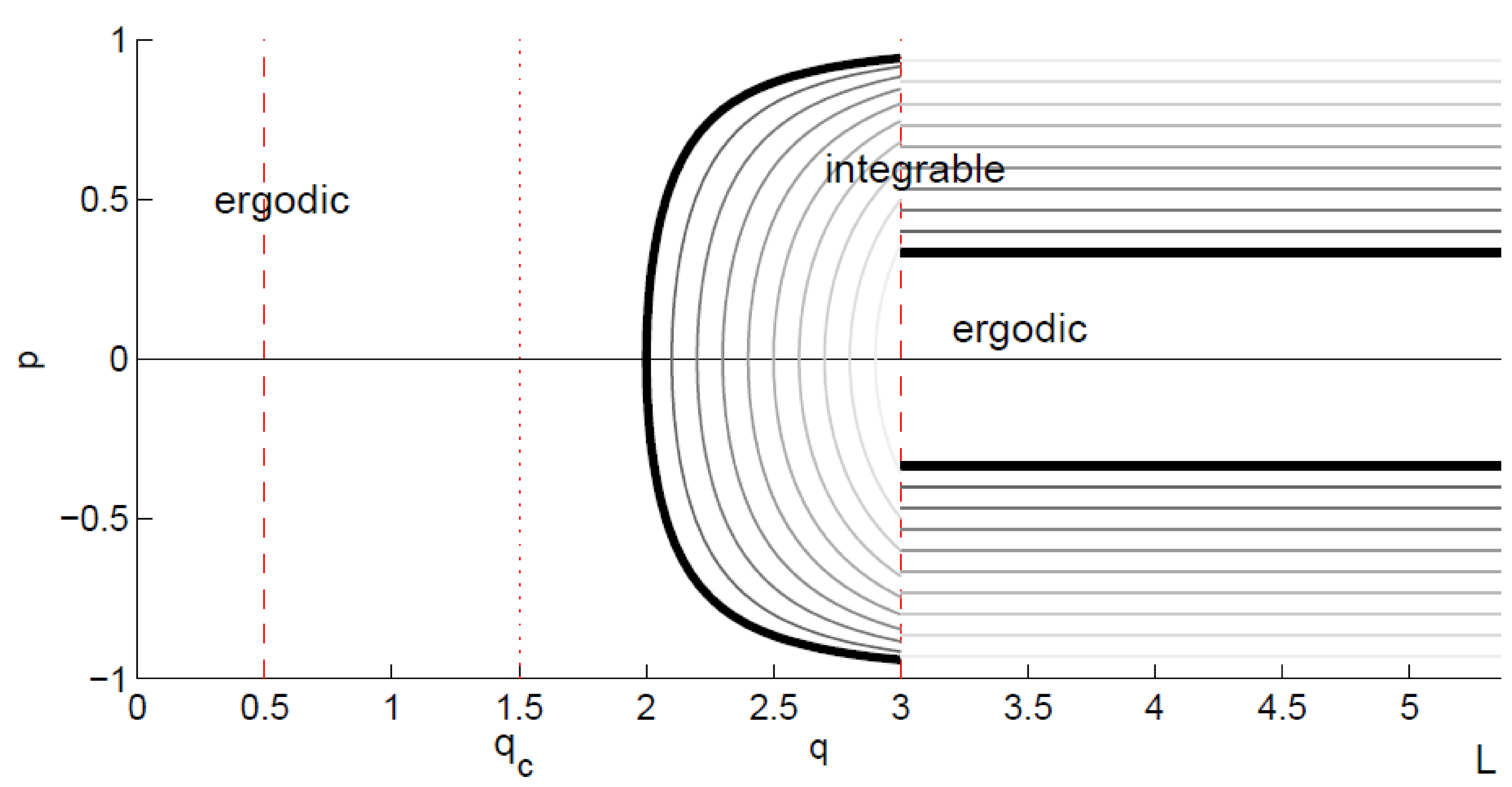

Figura 1: Seção de Poincaré de um bilhar de Bunimovich (cogumelo). As linhas verticais tracejadas mostram a localização dos "cantos". As linhas pretas mostram a borda do espaço de fase integrável; para $q = 2$, temos a menor cáustica possível para um espaço de fase integrável. As demais linhas, localizadas na região integrável, referem-se à família de órbitas definida pelo momento angular constante. [2]

Na referência [2], a conjectura de Percival foi verificada com bastante precisão (1,7 %). Para isso, foi proposto um modelo de dinâmica de tunelamento que prediz bem os componentes caóticos de modos predominantemente regulares. Este mesmo modelo explica também as superposições das densidades dos modos proporcionais a $E^{-1/3}$, (E autovalor), condizente ao proposto em [1].

A figura abaixo ilustra os 20 primeiros modos ímpares para o bilhar de Bunimovich, realizados através das simulações computacionais com base no modelo proposto.

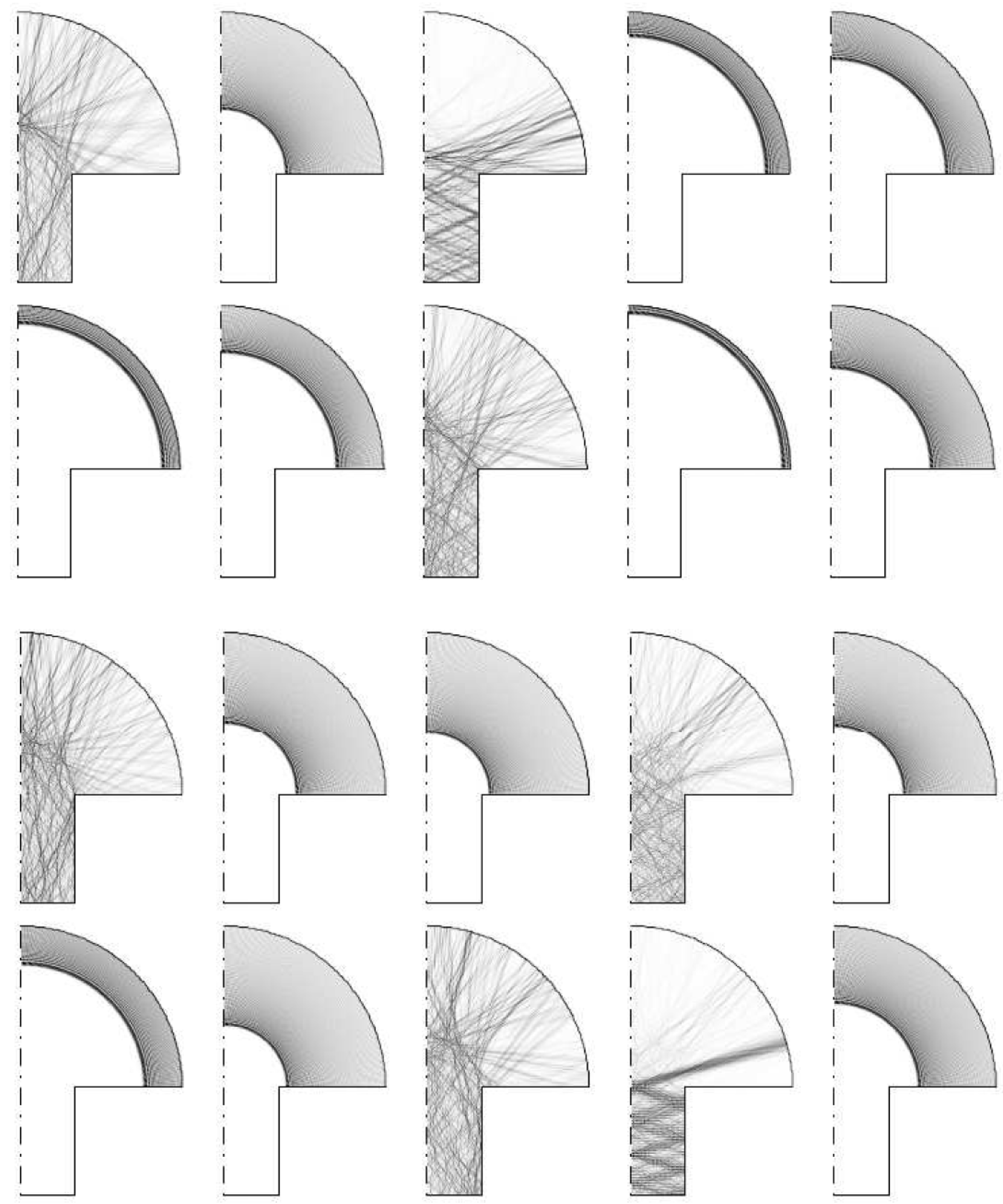

Figura 2: Os primeiros 20 modos ímpares de um bilhar cogumelo. [2]

Na fig. 2, a conjectura de Percival é válida: as simulações mostram tanto os modos regulares quanto os caóticos, mas não uma mistura deles. Em seguida, o problema foi estudado estatisticamente: para isso, propuseram uma função que indica as regiões regulares das irregulares; as análises numéricas mostraram com grande precisão que os autovalores são proporcionais a $E^{-1/3}$, validando a conjectura.

Conclusões

Estudamos os bilhares no contexto da mecânica quântica e calculamos a equação de Schrödinger para os casos mais simples (bilhar retangular e circular). Revisamos os artigos [1, 2] a fim de estudar a conjectura de Percival e expusemos, a partir de [2], os resultados que a validam.

Referências Bibliográficas

1. PERCIVAL, I. C., *Regular and irregular spectra*, J. Phys. B: Atom. Molec. Phys., Vol. 6, 1973.
2. BARNETT, A. H.; BETCKE, T., *Quantum mushroom billiards*, CHAOS 17, 2007.

Apoio

CNPq
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico