REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADO DE SISTEMAS LTV DE SEGUNDA ORDEM

Autores: L. I. N. Rosa (bolsista) e J. F. Camino (orientador)

UNICAMP

Faculdade de Engenharia Mecânica - FEM

SAE serviço de apoio ao estudante

Palavras Chaves: Sistemas variantes no tempo (LTV) - Representação no espaço de estado

1. Objetivo

- Este trabalho tem com objetivo estudar possíveis representações no espaço de estado para sistemas lineares variantes no tempo (LTV) de segunda ordem e também mostrar que, em princípio, essas representações não são diretamente obtidas de representações de sistemas lineares invariantes no tempo (LTI).

2. Introdução

- A maioria das técnicas de controle moderno assume que a planta a ser controlada está representada no espaço de estado, que é uma representação de primeira ordem para um sistema de equações diferenciais.
- Além disso, alguns sistemas na prática são variantes no tempo. Por exemplo, um foguete tem sua massa variante no tempo, pois o combustível é consumido ao longo de sua viagem.
- Para sistemas lineares invariantes no tempo (LTI), a obtenção de uma representação no espaço de estado a partir da equação diferencial do sistema é direta e bem conhecida.
- Por outro lado, para sistemas lineares variantes no tempo (LTV), este processo é mais complexo. Neste trabalho mostra-se uma maneira correta de se obter representações no espaço de estado para sistemas LTV de segunda ordem.

3. Metodologia

- Considere o sistema LTI descrito por

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) = u(t) \tag{1}$$

- Considere primeiramente a seguinte escolha de estados $x = \begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T \end{bmatrix}^T$ com

$$x_1 = z, \quad x_2 = \dot{z} = \dot{x}_1$$

- Diferenciando o vetor de estado, obtém-se

$$\dot{x}_1 = \dot{z} = x_2, \quad \dot{x}_2 = \ddot{z} = \frac{u}{m} - \frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2$$

- Definindo a saída como sendo o deslocamento

$$y = z = x_1$$

- Obtém-se o seguinte modelo de estado

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

- Considerando agora a seguinte escolha de estados

$$x_1 = \dot{z} + \frac{c}{m}z, \quad x_2 = z$$

- Diferenciando no tempo, tem-se

$$\dot{x}_1 = \ddot{z} + \frac{c}{m}\dot{z} = \frac{u}{m} - \frac{k}{m}x_2, \quad \dot{x}_2 = \dot{z} = x_1 - \frac{c}{m}x_2$$

- Definindo a saída como sendo o deslocamento

$$y = z = x_2$$

- obtém-se o seguinte modelo de estado

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-k}{m} \\ 1 & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

- Assim, os modelos (2) e (3) são duas representações no espaço de estado diferentes para a equação (1).
- Considere o sistema LTV descrito pela equação diferencial

$$m(t)\ddot{z}(t) + c(t)\dot{z}(t) + k(t)z(t) = u(t) \tag{4}$$

- As representações no espaço de estado serão obtidas de duas formas diferentes. Primeiro, supõe-se que a representação LTV pode ser obtida diretamente da representação LTI, por mera substituição dos parâmetros constantes m, c, k pelos parâmetros variantes $m(t)$,$c(t)$,$k(t)$. Se isto fosse válido, a equação (4) admitiria as seguintes representações (obtidas, respectivamente, das representações (2) e (3))

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k(t)}{m(t)} & -\frac{c(t)}{m(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m(t)} \end{bmatrix} u(t) \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-k(t)}{m(t)} \\ 1 & -\frac{c(t)}{m(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m(t)} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

- Por analogia com as escolhas feitas para o sistema LTI, considere a escolha de estados $x = \begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T \end{bmatrix}^T$ com

$$x_1 = z, \quad x_2 = \dot{z} \tag{7}$$

- Obtém-se a seguinte representação

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k(t)}{m(t)} & -\frac{c(t)}{m(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m(t)} \end{bmatrix} u(t) \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

- Considere agora a seguinte escolha de estados

$$x_1 = \dot{z} + \frac{c(t)}{m(t)}z, \quad x_2 = z$$

- Obtém-se a seguinte representação

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-k(t)}{m(t)} + \frac{d}{dt}\left(\frac{c(t)}{m(t)}\right) \\ 1 & -\frac{c(t)}{m(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m(t)} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

- Uma vez derivados, estes modelos podem ser integrados para comparação dos resultados.
- Para isto, integra-se a equação diferencial $m(t)\ddot{z} + c(t)\dot{z} + k(t)z = f(t)$ diretamente a partir do integrador NDSolve, do Mathematica, e compara-se com a integração dos modelos de estado feitas pelo integrador ODE45, do Matlab.

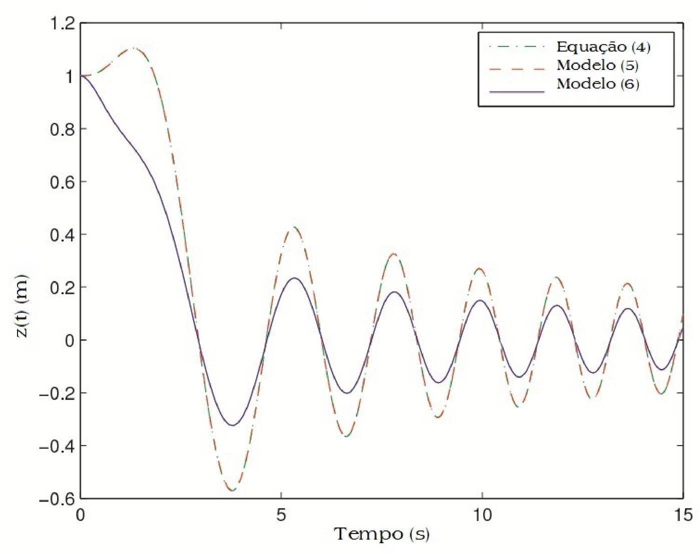
4. Resultados

4.1 Metodologia de mímica

- Os resultados numéricos são obtidos integrando-se diretamente a equação (4) com o NDSolve do programa Mathematica, e os modelos (5) e (6) são integrados utilizando-se o integrador ode45 do programa Matlab.
- Para a simulação numérica, os seguintes parâmetros são utilizados

$$m(t) = t^2+1, \quad c(t) = t, \quad k(t) = t^3, \quad \dot{z}(0) = 0, \quad z(0) = 1, \quad u(t) = \sin(t) \tag{10}$$

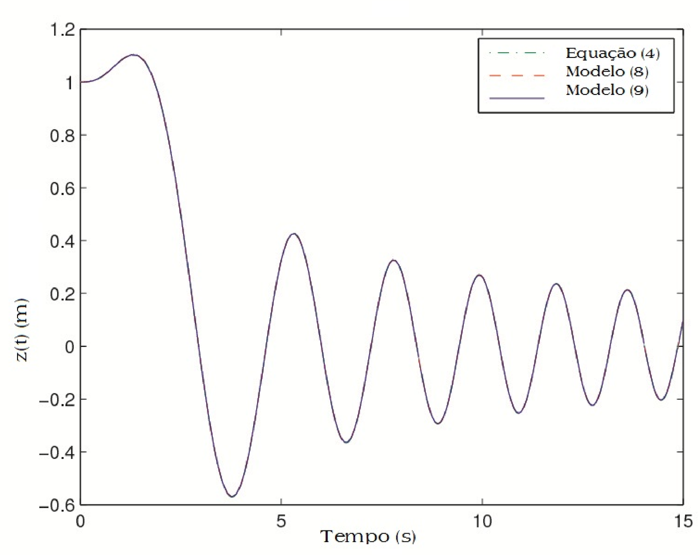
- Os resultados numéricos da simulação estão apresentados na Figura 4.1.



Saída $z(t)$ dos sistemas (4), (5) *e* (6), *com parâmetros dados por* (10).

4.2 Metodologia de escolha dos estados

- A Figura 4.2 apresenta os resultados numéricos obtidos, onde observa-se que os modelos (8) e (9) representam, de fato, o sistema LTV dado por (4).



Saída $z(t)$ dos sistemas (4), (8) *e* (9), *com parâmetros dados por* (10).

5. Conclusão

- Dos resultados exibidos acima conclui-se que a metodologia de se escolher os estados e então diferenciá-los no tempo trará representações corretas.
- A metodologia de mímica com as representações LTI somente trará resultados corretos se a escolha dos estados não envolver os parâmetros variantes no tempo. Com efeito, é o que aconteceu com os modelos dados por (5) e (8), que são idênticos.
- Como a metodologia de mímica direta com as representações LTI não trará, necessariamente, representações corretas, conclui-se que é melhor se obter representações no espaço de estado para sistemas LTV a partir da escolha dos estados e posterior diferenciação no tempo.