OS "POSTULADOS" DA RÉGUA E DO TRANSFERIDOR

Diana Terezinha Amaro
Licenciatura em Matemática
d102007@dac.unicamp.br

Prof. Dr. Henrique N. Sá Earp
Departamento de Matemática
hqsaearp@ime.unicamp.br

Agência Financiadora: FAPESP

Palavras-Chave: Postulado da Régua - Postulado do Transferidor - Axiomas de Hilbert

Introdução

Inspirados pelo estudo adequado da axiomática de Hilbert [2], mostraremos que o primeiro resultado é, de fato, um teorema e o segundo um corolário.

Teorema da Régua: ([1], p.16) *Os pontos de uma reta podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números reais.*

Corolário do Transferidor: ([1], p.38) *É possível colocar em correspondência biunívoca os números reais entre zero e 180 e as semi-retas de mesma origem que dividem um dado semi-plano.*

Resultados

Os axiomas de Hilbert são divididos em:

- **Incidência:** (I.1) $\sim$ (I.7); (I.1): dados $A, B \in \mathcal{P}$ existe uma única reta ℓ tal que $(AB) = \ell$.
- **Ordem:** (II.1) $\sim$ (II.5); (II.2): seja $(AB) = \ell$, existem $C, D \in \mathcal{P}$ tais que $A - C - B$ e $A - B - D$.
- **Axioma das Paralelas:** Dada a reta ℓ e $A \notin \ell$ com $\ell, A \in \pi$ existe única $\ell' \in \pi$ tal que $\ell \parallel \ell'$.
- **Congruência:** (IV.1) $\sim$ (IV.6); (IV.1): Dado o segmeto $[AB]$, $\exists! D \in [CX)$ tal que $[CD] \equiv [AB]$.
- **Continuidade e Completude:** (V.1) e (V.2); (V.2): Não é possível acrescentar pontos, retas e planos tais que o novo sistema respeite a todos os axiomas anteriores.

Definição: $[AB] + [CD] \equiv [AE]$, onde $A - B - E$ e $[BE] \equiv [CD]$.

Definição: $[AB] < [CD]$ se existe $E \in [CD)$ tal que $[AB] \equiv [CE]$.

Figura: $[AB] + [CD]$

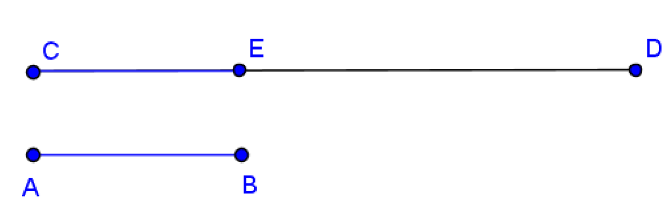

Figura: $[AB] < [CD]$

Lema: A congruência de segmentos é uma relação de equivalência.

$$a := \overline{[AB]} := \{[A'B'] \,|\, [A'B'] \equiv [AB]\}$$

$$\mathbb{E} := \text{ conjunto das classes de equivalência de segmentos}$$

Tomando segmentos representantes das classes de equivalência, estendemos a soma e a relação de ordem para $\mathbb{E}$. Podemos escolher arbitrariamente um segmento $[AB]$, cuja classe de equivalência fixamos como a unidade e, então definimos o *produto*

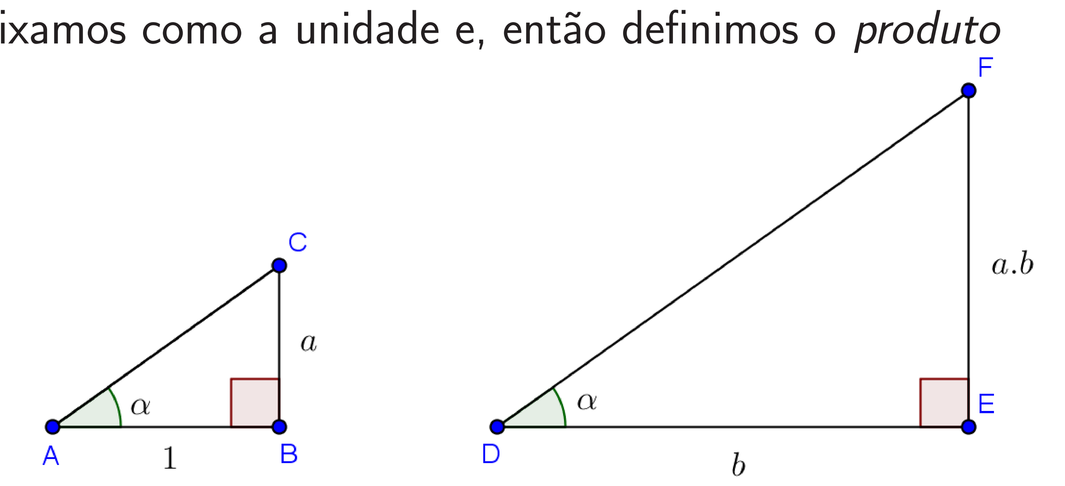

Figura: $a.b := \overline{[EF]}$

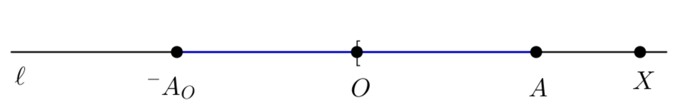

Figura: Definição da antípoda de A.

Lema: A semi-reta $[OX) \subset \ell$ define uma orientação em ℓ.

De modo a definir o inverso aditivo de $a \in \mathbb{E}$, fixaremos $[OX) \subset \ell$ como o sentido positivo de ℓ.

Definição: Seja $A \in [OX) \subset \ell$. A *antípoda* de A é o ponto ${}^{-}A_O \in \ell$ tal que ${}^{-}A_O - O - A$ com $[{}^{-}A_O O] \equiv [OA]$. Se $\overline{[OA]} = a$, então $\overline{[{}^{-}A_O O]} := -a$.

Teorema: $(\mathbb{E}, +, ., <, 0, 1)$ é um corpo ordenado, onde $0 := \overline{[OO]}$.

Definição: Dados $\{X_1, X_2\} \subset \ell$, $X_1 < X_2$ se $O - X_1 - X_2$ ou $X_1 - O - X_2$ ou $X_1 - X_2 - O$.

Definição: O conjunto não-vazio $\mathcal{D} \subset \ell$ é *limitado superiormente* se $\exists E \in \ell$ tal que $D < E \forall D \in \mathcal{D}$. E é dito *cota superior* de $\mathcal{D}$. O ponto $S \in \ell$ é o *supremo* de $\mathcal{D}$ se S é uma cota superior e se dado $C \in \ell$ tal que $D < C$ para todo $D \in \mathcal{D}$, então $S < C$.

$$\sup \mathcal{D} := \overline{[OS]}.$$

Por (V.2), o supremo do conjunto $\mathcal{D}$ existe e como um ponto de ℓ, $\sup \mathcal{D} \in \mathbb{E}$ é bem definido.

Teorema: $(\mathbb{E}, +, ., <, 0, 1)$ é um corpo ordenado completo.

Teorema: Todo corpo ordenado completo é isomorfo aos reais.

Tendo em vista que todo real pode ser definido pelos racionais menores do que ele, facilmente demonstra-se que, dado o corpo ordenado completo $(\mathbb{F}, \oplus, \odot, \lhd, 0', 1')$, a função

Resultados

$$\begin{array}{llll} \Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{F} & & \Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{F} & \\ \quad 0 \to 0' & & \quad 1 \to 1' & \\ \quad n \to n' := 1' \oplus 1' \oplus \cdots \oplus 1' & \text{se } n \in \mathbb{N} & \quad n \to n' := \ominus(1' \oplus 1' \oplus \cdots \oplus 1') & \text{se } n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \\ \quad \frac{m}{n} \to \frac{m'}{n'} & & \quad x \to \sup\{\frac{m'}{n'} \,|\, \frac{m}{n} < x\} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{array}$$

é um isomorfismo. Portanto, demonstramos o "Postulado" da Régua. Ademais, mesmo que este axioma fosse necessário, o "Postulado" do Transferidor não o seria:

Definição: O *interior de* $\widehat{AOB}$ é a região:

$$\text{int}\,\widehat{AOB} = \begin{cases} [OA) = [OB) & \text{se } O - A - B \text{ ou } O - B - A; \\ (AB) & \text{se } A - O - B; \\ \bigcup_{C \in [AB]} [OC) & \text{senão.} \end{cases}$$

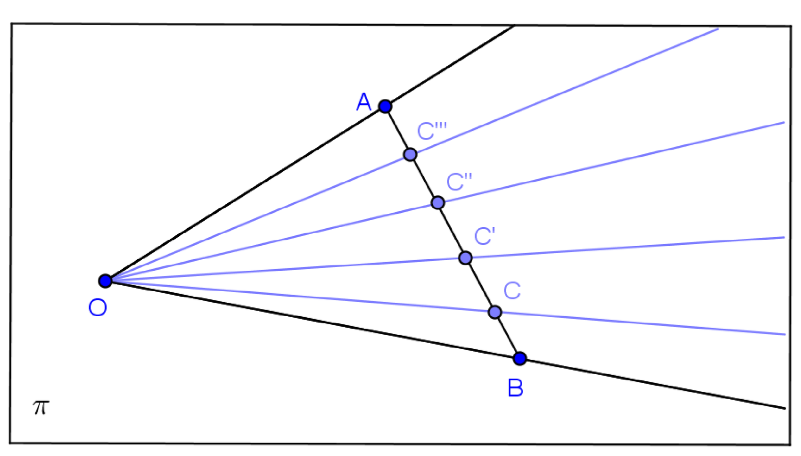

Figura: int $\widehat{AOB}$

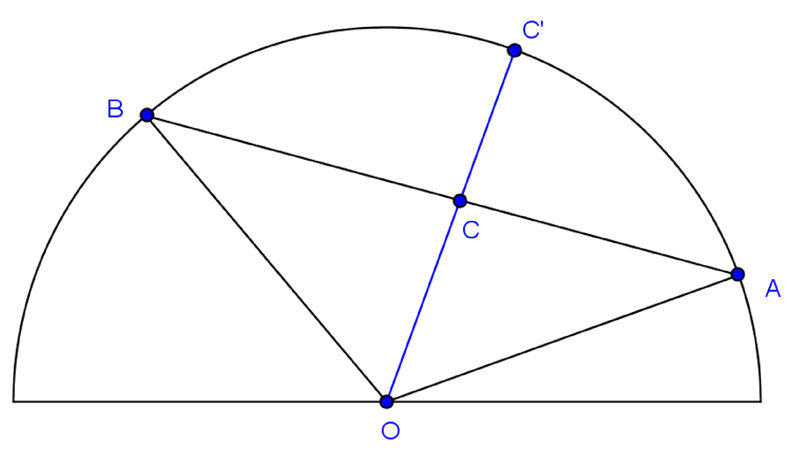

Figura: $A \frown C' \frown B \Longleftrightarrow A - C - B$

Os axiomas de incidência e ordem na reta induzem incidência e ordem no semi-círculo, pois se $S_{O,r}$ é o semi-círculo de centro O e raio r com $\{A, B\} \subset S_{O,r}$. Cada $C \in (AB)$ tal que $A - C - B$ corresponde a $[OC) \in \text{int}\,\widehat{AOB}$. Pelo teorema da Régua, existe $C' \in [OC)$ tal que $\overline{[OC']} = r$. Logo, $C' \in S_{O,r}$. Sendo a recíproca trivial, temos a correspondência biunívoca:

$$A \frown C' \frown B \Longleftrightarrow A - C - B$$

Seja $S_{O,1}$ o semi-círculo unitário de diâmetro $[AB]$. Tome $C \in S_{O,1}$ tal que $[OC] \perp [AB]$.

Definição: Se $D \in S_{O,1}$ com $A \frown D \frown C$, sen $\widehat{AOD} := \overline{[DE]}$;
Se $D' \in S_{O,1}$ com $C \frown D' \frown B$, sen $\widehat{AOD'} :=$ sen $\left(\text{spl}\left(\widehat{AOD'}\right)\right)$.

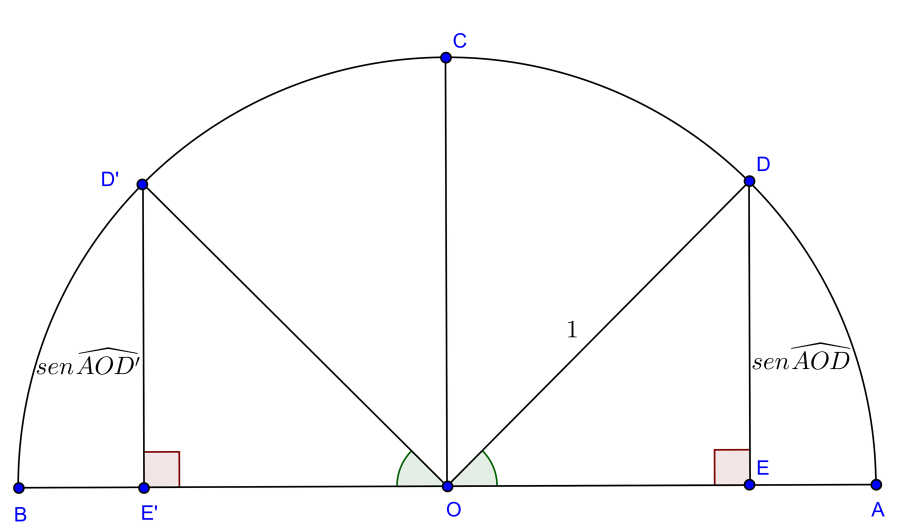

Figura: sen $\widehat{AOD}$

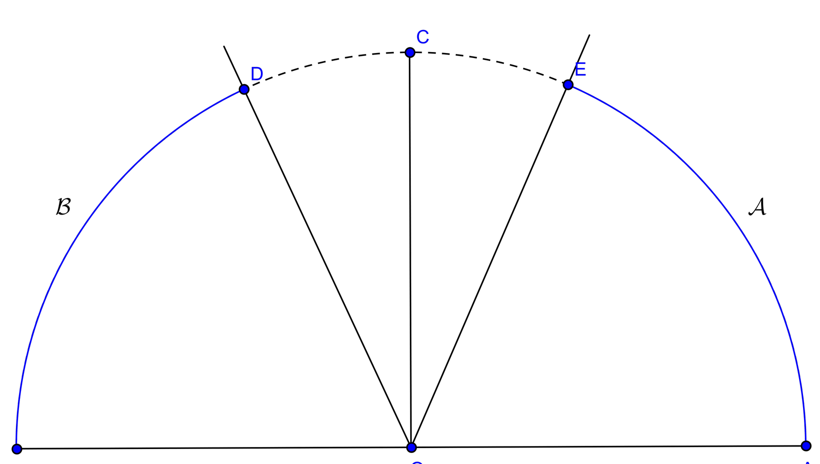

Figura: $\sup \mathcal{A} = \inf \mathcal{B}$

Se $\mathcal{A} := \{D \in S_{O,1} \,|\, A \frown D \frown C\}$ e $\mathcal{B} := \{D' \in S_{O,1} \,|\, C \frown D' \frown B\}$ resulta facilmente que $\sup \mathcal{A} = \inf \mathcal{B}$. Definimos sen $\widehat{AOC} := 1$ e sen $\widehat{O} := 0$. Assim, sen : $\mathcal{A} \to \text{Img}\,(\mathcal{A}) \subset \mathbb{E}$ é contínuo e bijetivo. Logo, admite inversa, arcsen : Img $(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$. E, então, obtemos a medida μ do ângulo $\widehat{AOD}$ a partir da *relação arco-corda*:

$$\mu\left(\widehat{AOD}\right) = 2.\text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

onde $D \in S_{O,1}$ e $x = \overline{[AD]}, 0 \leqslant x \leqslant 2$. Resultando o "Postulado" do Transferidor.

Conclusão

Os postulados da Régua e do supremo (V.2) são equivalentes. É trivial que (V.2) resulte do axioma da Régua. Neste trabalho construímos o corpo ordenado completo $\mathbb{E}$ e demonstramos a implicação inversa. Todavia, as bibliografias em português mais conhecidas não fazem esta abordagem e apresentam como *axiomas* os teoremas que provamos. Intitular como tais durante a escola básica é justificável, porém a proposta deste painel é notavelmente mais adequada ao estudo de geometria no ensino superior.

Referências

- BARBOSA, J. L. *Geometria Euclidiana Plana*, Sociedade Brasileira de Matemática, (2006).
- HARTSHORNE, R. *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer-Verlag, (2000).