UM ESTUDO SOBRE O PROBLEMA DO CARTEIRO CHINÊS (PCC)

Fernanda Bia Peteam (orientando)
fernandapeteam@gmail.com

Maria Aparecida Diniz Ehrhardt
(orientador)
cheti@ime.unicamp.br

UNICAMP

IMECC - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

IMECC

Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica - PIBIC - CNPq/SAE

Teoria de Grafos - Carteiro Chinês

Introdução

O PCC foi proposto pelo matemático Kwan Mei-Ko, em 1962, ao tentar resolver o problema dos carteiros da sua cidade, procurando o melhor caminho possível (menor distância percorrida) de forma que os carteiros visitassem todas as casas dos seus respectivos percursos e retornassem ao ponto de partida. Kwan Mei-Ko definiu o problema da seguinte maneira *"Um carteiro tem que cobrir seu local de trabalho, antes de retornar ao posto. O problema é encontrar a menor distância de percurso para o carteiro"*. O PCC está relacionado com o problema das sete pontes de Königsberg (Figura 1), estudado por Leonhard Euler e publicado em um artigo em 1736, que buscava um caminho que passasse exatamente uma vez por cada uma das sete pontes do rio Pregel, na cidade de Königsberg, na Rússia . Quatro dessas pontes ligavam margens opostas a uma ilha no meio do rio, outras duas ligavam as margens opostas de uma outra ilha próxima à primeira e a última ponte ligava as duas ilhas. A conclusão de Euler foi que não seria possível cruzar cada ponte exatamente uma vez e retornar ao ponto de partida. Isso pode acontecer com o carteiro, ele pode precisar passar mais de uma vez por certas ruas para poder completar seu percurso, mas o ideal é que passe exatamente uma vez por cada rua (cada casa).

Conceitos Básicos

Definição 1. *Um grafo $G = (V, L)$ é formado por um conjunto finito e não vazio de vértices $V = \{1, 2, \cdots, m\}$ e por um conjunto finito $L = (E, A)$, onde E é o conjunto de pares ordenados das arestas não orientadas (elos), com $e_k = (i, j)$ para $i, j \in V$ representando a aresta que liga o vértice i ao vértice j, e A é o conjunto de pares ordenados das ligações orientadas (arcos), com $a_k = (i, j)$ para $i, j \in V$ representando a ligação que sai de i (origem) e chega em j (destino).*

Definição 2. *Dizemos que um elo $e_k = (i, j)$ e/ou um arco $a_k = (i, j)$ são incidentes aos vértices i e j; e chamamos de grau do vértice a quantidade de elos e/ou arcos incidentes ao vértice.*

Teorema 1. *Em todo grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.*

Definição 3. *Um grafo é conexo se, para todo par de vértices u,v $\in G$, existe um caminho de u a v em G.*

Definição 4. *Um caminho é uma sequência de vértices $v_0, \ldots, v_k$ tal que $(v_{i-1}, v_i) \in L$ para $i = 1, \ldots, k$ e todos os vértices são distintos. Um caminho é dito fechado se $v_0 = v_k$ para $k \geq 3$.*

Definição 5. *O tamanho de um caminho ou passeio é o número de elos e arcos que o mesmo possui e um caminho ou passeio é dito par ou ímpar se o seu tamanho é par ou ímpar (respectivamente).*

Definição 6. *Um grafo G é dito euleriano se possui um caminho fechado (circuito) contendo cada elo/arco exatamente uma vez e cada vértice pelo menos uma vez (**circuito euleriano**).*

Um grafo euleriano é sempre conexo (todo caminho é, por definição, sempre conexo), com exceção de vértices isolados.

Teorema 2. ***(Teorema de Euler)** Um grafo é euleriano se, e somente se, possui todos os vértices de grau par. [3]*

O PCC

No PCC, as ruas são representadas pelas arestas e os cruzamentos das ruas são representados pelos vértices. Nesse problema, busca-se o menor caminho possível para percorrer todas as ruas, ou seja, todas as arestas do grafo correspondente ao percurso do carteiro e o ótimo seria, se possível, passar exatamente uma vez por cada aresta, ou seja, encontrar o caminho euleriano do grafo, caso exista. O primeiro passo, então, é aplicar um algoritmo para verificar se o grafo possui caminho euleriano e encontrar o caminho euleriano (solução ótima). O algoritmo mais comum é o Algoritmo de Hierholzer, que é baseado na prova do Teorema 2. Caso o grafo não satisfaça o Teorema 2, isto é, não seja eueriano, arestas terão de ser repetidas, criando arestas artificiais para transformar o grafo original em um grafo euleriano, sempre buscando repetir as arestas que forneçam o caminho com a menor distância possível. As arestas artificiais são repetições de arestas já existentes e mostram quais ruas o carteiro terá de percorrer mais de uma vez.

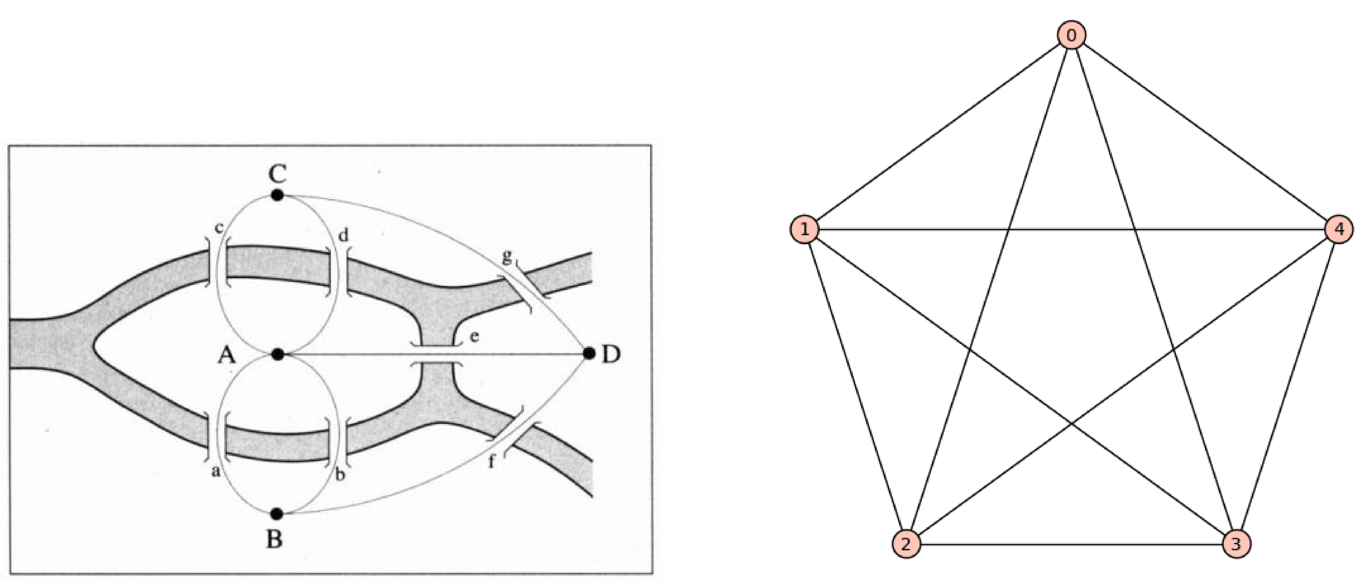


Figura 1: Sete pontes de Könisberg e grafo euleriano (respectivamente)

PCC Simétrico(CPP): gerar percurso de custo mínimo sobre um grafo $G = (V, E)$ (não orientado), valorado e conexo, a partir de um vértice $v_0 \in V$ (origem do percurso). Os elos são valorados de maneira que o percurso entre quaisquer vértices seja o mesmo tanto na ida quanto na volta. A transformação do grafo G não euleriano para um grafo G' euleriano atua nos vértices de grau ímpar, para deixá-los com grau par. Os elos a serem inseridos são encontrados através da busca do caminho mínimo entre cada par de vértices de grau ímpar[2].

PCC Dirigido/Orientado(DCPP): gerar percurso de custo mínimo sobre um grafo $G = (V, A)$, valorado e f-conexo (todo par de vértices está ligado por pelo menos um caminho em cada sentido), a partir de um vértice de origem $v_0 \in V$. Para que exista um circuito euleriano é preciso que o grau de entrada seja igual o grau de saída do vértice e, quando isso não ocorre é necessário acrescentar cópias apropriadas de alguns arcos, formando um novo grafo G'. Para isso, utilizou-se o Problema do Fluxo de Custo Mínimo *Out-of-Kilter* [1,2].

O Software XNÊS

O software XNÊS foi desenvolvido pelos professores Marcos José Negreiros Gomes (DSc/UECE) e Francisco José Negreiros Gomes (DSc/UFES) e suas respectivas equipes. O programa foi idealizado para encontrar a solução exata de problemas relacionados ao PCC, usando Modelagem Visual Iterativa (MVI), através de um ambiente gráfico onde mudanças no grafo podem ser feitas e visualisadas dinamicamente na interface do programa, inclusive criar grafos baseados ou não em mapas reais. Este foi o software utilizado para os testes numéricos.

Tipo: Misto		
Nº de Vértices	:	5
Nº de Elos	:	4
Nº de Arcos	:	2
Nº Vert GImpar	:	2
Perímetro	:	345,00

Tipo: Misto		
Nº de Vértices	:	75
Nº de Elos	:	15
Nº de Arcos	:	95
Nº Vert GImpar	:	37
Perímetro	:	24443,00

Figura 2: Informações grafo Exemplo 1 e Exemplo 2 (respectivamente)

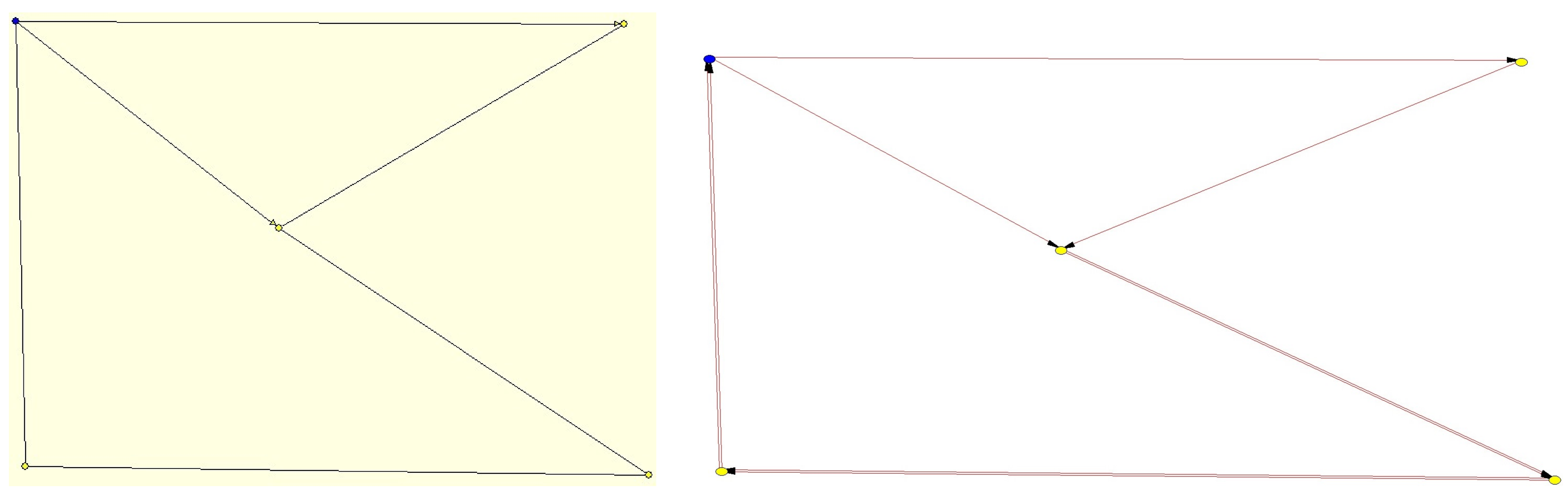
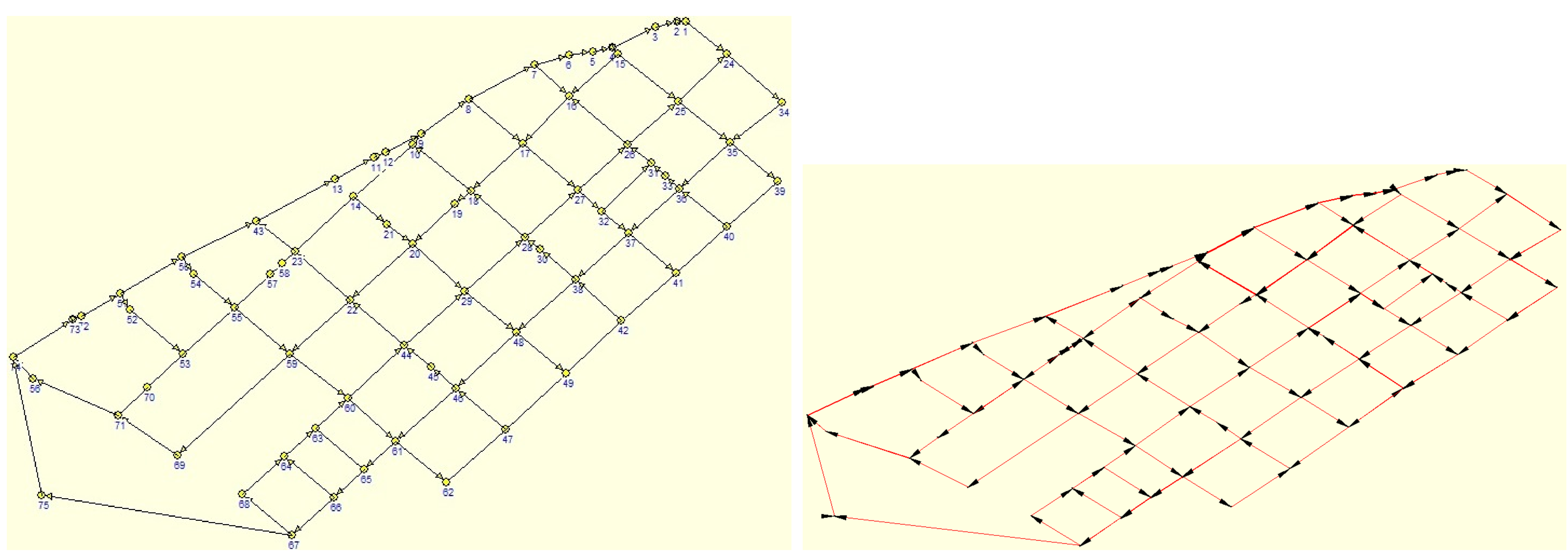


Figura 3: Exemplo 1.



O custo do caminho ótimo (euleriano) do Exemplo 1 foi de 570 e, do Exemplo 2, de 31954.

Bibliografia

[1]Bazaraa,N.S.;Jarvis,J.J. & Sherali, H.D.. *Linear Programming and Netwrk Flow,1990.*;

[2]Negreiros Gomes,M.J.; Coelho Jr.,W.;Castro Palhano A.W.de; Ferreira Coutinho,E.; Alves de Castro, G.; Negreiros Gomes,F.J.; Cutini Barcellos,G.; Fernandes Rezendo,B.; Lessa Pereira,L.W.. *O Problema do carteiro chinês, algoritmos exatos e um ambiente MVI para análise de suas instâncias: sistema XNÊS*, 2009.;

[3]Nemhauser,G.L.; Wolsey,L.A.. *Integer and Combinatorial Optimization*, 1999.