ÁLGEBRA LINEAR E APLICAÇÕES

Lucas Bastioni †
Licenciatura em Matemática - IMECC
l103120@dac.unicamp.br

Profa. Dra. Eliane Quelho Frota Rezende
IMECC - Departamento de Matemática
eliane@ime.unicamp.br

Este trabalho contou com o apoio financeiro do SAE - UNICAMP †

Palavras-Chave: Álgebra Linear - Transformações Lineares - Operadores Lineares

Aproximação em espaços de funções

Consideremos o espaço vetorial $C[a,b]$ e uma função $f \in C[a,b]$. Queremos encontrar uma outra função $g \in C[a,b]$ de tal forma que g seja a melhor aproximação de f, ou mais especificamente, queremos uma função $g \in W$, sendo W um subespaço de $C[a,b]$.

Nesse caso, para melhor aproximar a função f pela função g, podemos minimizar a seguinte expressão

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]^2 dx, \text{ chamado erro quadrático médio.}$$

Definição. *Em $C[a,b]$, definimos o produto interno de duas funções da seguinte maneira*

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Com essa definição, poderemos calcular a norma do vetor $f-g \in C[a,b]$ da seguinte maneira

$$\|f-g\|^2 = \langle f-g, f-g\rangle = \int_a^b [f(x)-g(x)]^2 dx$$

Teorema

Sejam V um espaço vetorial com produto interno, $W \subset V$ um subespaço e $v \in V$. O vetor $w \in W$ que satisfaz a desigualdade

$$\|v-w\| < \|v-u\|$$

para cada $u \in W \setminus w$ é a projeção ortogonal de v sobre W, ou seja,

$$w = proj_W v$$

Polinômios trigonométricos

Definição. *Um polinômio trigonométrico é uma função da forma*

$$t(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j cos(jx) + \sum_{j=0}^{n} b_j sen(jx)$$

Definição. *Se a_n e b_n não são ambos nulos, dizemos que n é a ordem de $t(x)$.*

Proposição. *Os polinômios trigonométricos de ordem menor ou igual a n formam um subespaço de $C[a,b]$. Uma base para esse subespaço é $\{1,\ cos(x),\ \ldots,\ cos(nx),\ sen(x),\ \ldots,\ sen(nx)\}$.*

Nosso objetivo é encontrar uma aproximação para uma dada função $f \in C[0,2\pi]$ por um polinômio trigonométrico de ordem menor ou igual a n. Vamos denotar $\mathcal{T} \subset C[0,2\pi]$ tal subespaço de $C[0,2\pi]$.

Teorema

Todo espaço vetorial de dimensão finita com produto interno possui uma base ortonormal.

Para encontrar essa base para $\mathcal{T}$ usamos o chamado processo de ortogonalização de Gram-Schimidt. Assim, considere uma base ortonormal $\{g_0,\ldots,g_{2n}\}$ de $\mathcal{T}$. Essa é dada por

$$g_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}};\ g_j = \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(jx) \text{ para } j \in \{1,\ldots,n\}$$

$$g_j = \frac{1}{\sqrt{\pi}} sen((j-n)x) \text{ para } j \in \{n+1,\ldots,2n\}$$

Vamos introduzir a seguinte notação

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\langle f,g_0\rangle;\ a_j = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle f,g_j\rangle \text{ para } j \in \{1,\ldots,n\};\ b_{j-n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle f,g_j\rangle \text{ para } j \in \{n+1,\ldots,2n\}$$

Sabemos que a projeção ortogonal de f sobre o subespaço $\mathcal{T}$ é dada pela seguinte fórmula

$$proj_{\mathcal{T}} f = \sum_{j=0}^{2n} \langle f,g_j\rangle g_j$$

Ainda sobre os polinômios trigonométricos

Usando a notação que introduzimos e aplicando isso na fórmula acima, temos

$$proj_{\mathcal{T}} f = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} a_j cos(jx) + \sum_{j=1}^{n} b_j sen(jx)$$

sendo os a_j e os b_j com a definição do produto interno dada acima (já com alguns cálculos realizados), dados por

$$a_j = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)cos(jx)dx$$

$$b_j = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)sen(jx)dx$$

Se a função original $f(x)$ está definida no intervalo $[0,T]$ temos o seguinte resultado

Teorema

Se $f(x)$ é contínua em $[0,T]$ então a função trigonométrica $g(x)$ dada por

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} a_j cos\left(\frac{2\pi j}{T}x\right) + \sum_{j=1}^{n} b_j sen\left(\frac{2\pi j}{T}x\right)$$

que minimiza o erro quadrático médio, tem coeficientes

$$a_j = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)cos\left(\frac{2\pi j}{T}x\right)dx \text{ para } j \in \{0,\ldots,n\}$$

$$b_j = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)sen\left(\frac{2\pi j}{T}x\right)dx \text{ para } j \in \{1,\ldots,n\}$$

O Problema da onda sonora

As ondas mais elementares que nossos ouvidos são capazes de receber podem ser descritas como $q(t) = A_0 + Asen(\omega t - \delta)$, sendo $q(t)$ a pressão atmosférica no tímpano, A_0 a pressão atmosférica normal, A a variação máxima da pressão em relação à pressão atmosférica normal, $\frac{\omega}{2\pi}$ é a frequência da onda em ciclos por segundo e δ é o ângulo de fase da onda.

As ondas senoidais que são identificadas pelo ouvido humano possuem uma frequência que varia de 20 até 20.000 ciclos por segundo.

Vamos supor que uma onda sonora complexa é escrita como soma finita de componentes senoidais com suas respectivas características, *i.e.*

$$q(t) = A_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j sen(\omega_j t - \delta_j). \tag{1}$$

Considere agora uma onda sonora periódica com período T denotada por $p(t)$ e que não podemos escrevê-la como (1). Observações mostram que o ouvido, ao receber uma onda desse tipo, se comporta da mesma forma como se estivesse recebendo uma onda do tipo $q(t)$.

Como elas sensibilizam o ouvido da mesma maneira, é natural esperar que elas possuam o mesmo período T. Isso requer que cada termo senoidal de $q(t)$ tenha período T. Sendo assim, as frequências das componentes senoidais devem ser multiplos inteiros de $\frac{1}{T}$ da função $p(t)$, logo $\omega_j = \frac{2j\pi}{T}$ para $j \in \mathbb{N}$.

Temos que tomar a seguinte expressão

$$q(t) = A_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j sen\left(\frac{2\pi j}{T}t - \delta_j\right), \text{ sendo } n \text{ o maior natural tal que } \frac{n}{T} \leq 20.000.$$

Voltemos nossa atenção para as amplitudes e ângulos de fases. Existe um critério pelo qual o sistema auditivo escolhe tais valores para fazer com que $q(t)$ tenha a mesma resposta do que $p(t)$. Vamos denotar o erro dessa aproximação para o reconhecimento como $e(t) = p(t) - q(t)$.

Tal erro deve passar desapercebido pelo ouvido para que essas ondas possam ser interpretadas da mesma forma. Para que isso ocorra devemos ter

$$\|e(t)\|^2 = \int_0^T (e(t))^2 dt = \int_0^T (p(t)-q(t))^2 dt \text{ o menor possível.}$$

Se essa expressão é tão pequena quanto possível, então as duas ondas produzem a mesma sensação de som. Matematicamente a função $q(t)$ é a aproximação por mínimos quadrados de $p(t)$ em $C[0,T]$, com $q(t) \in \mathcal{T}$.