MELHORES APROXIMAÇÕES EM ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO

Otávio Marçal Leandro Gomide (orientando)
otaviomleandro@hotmail.com

Ary Orozimbo Chiacchio (orientador)
ary@ime.unicamp.br

IMECC - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica - PIBIC - CNPq

Introdução

A Teoria da Aproximação é um ramo da Análise Funcional que apresenta ferramentas utilizadas em diversas áreas da Matemática; seus resultados têm aplicações em vários campos como equações diferenciais e integrais, mecânica quântica e cálculo de variações. Nesse projeto, estudamos elementos da teoria da aproximação, e analisamos importantes resultados como: o teorema de Aproximação de Weierstrass, o teorema de Interpolação Polinomial e o teorema de Representação de Riesz, assim como as formas de representação de uma melhor aproximação e suas implicações no estudo de funcionais lineares limitados.

Palavras Chave: Produto Interno - Melhor Aproximação - Funcional Linear

Conceitos Básicos

Definição 1. *Um espaço vetorial real X é um **espaço com produto interno** se existe uma função bilinear, positiva definida e simétrica $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$, chamada de produto interno.*

Definição 2. *Se X é um espaço com produto interno, a **norma** de $x \in X$ é definida por $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.*

Definição 3. *Sejam K um subconjunto não-vazio de um espaço com produto interno X e $x \in X$. Um elemento $y_0 \in K$ é uma **melhor aproximação** de x em K se:*

$$\|x - y_0\| = d(x, K) := \inf_{y \in K} \|x - y\|$$

*O número $d(x, K)$ é chamado **distância** de x a K.*

*Se cada $x \in X$ possui uma melhor aproximação em K, então K é chamado de **conjunto proximinal**. Caso cada $x \in X$ possua uma única melhor aproximação em K, dizemos que K é um **conjunto de Chebyshev**.*

Definição 4. *Um subconjunto K de um espaço vetorial X é dito **convexo** se $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$ para cada $x, y \in K$ e $0 \leq \lambda \leq 1$.*

Teorema 1. *(**Unicidade**) Seja K um subconjunto convexo do espaço com produto interno X. Então cada $x \in X$ possui, no máximo, uma melhor aproximação em K. Em particular, todo conjunto convexo proximinal é um conjunto de Chebyshev.*

Definição 5. *Seja (x_n) uma sequência em um subconjunto K de um espaço com produto interno X:*

1. *Dizemos que (x_n) é uma **sequência de Cauchy** em K se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que: $n, m \geq N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon$.*
2. *Se $x \in X$, dizemos que (x_n) é uma **sequência minimizante** para x, se $\|x - x_n\| \longrightarrow d(x, K)$.*

Definição 6. *Um subconjunto K de um espaço com produto interno X é dito:*

1. ***completo** se cada sequência de Cauchy em K converge para um ponto em K.*
2. ***aproximativamente compacto** se cada sequência minimizante possui uma subsequência convergente a um ponto em K.*

Teorema 2. *(**Existência**)*

1. *Todo conjunto aproximativamente compacto é proximinal.*
2. *Todo conjunto convexo completo é um conjunto aproximativamente compacto, e portanto é um conjunto de Chebyshev.*

Caracterização das Melhores Aproximações

Teorema 3. *(**Caracterização**) Sejam K um subconjunto convexo do espaço com produto interno X, $x \in X$, e $y_0 \in K$. Então y_0 é a melhor aproximação para x se, e somente se*

$$\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0 \quad \forall\, y \in K.$$

Podemos interpretar geometricamente este teorema de duas formas:

1. O ângulo θ entre os vetores $x - y_0$ e $y - y_0$ é no mínimo 90º para cada $y \in K$.
2. O conjunto convexo K está inteiramente em um dos lados do hiperplano H que é ortogonal a $x - y_0$ e que passa por y_0.

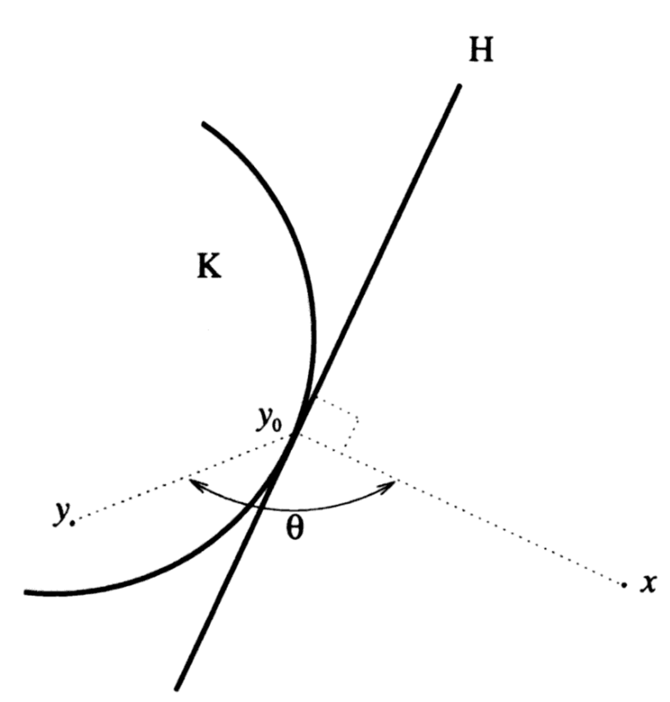

Figura 1: Interpretação geométrica das melhores aproximações

Funcionais Lineares Limitados

Definição 7. *Um **funcional linear** em um espaço com produto interno X é uma função real f definida em X tal que: $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ $\forall\, x, y \in X$, $\alpha.\beta \in \mathbb{R}$.*

*Dizemos que f é **limitado** se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que:*

$|f(x)| \leq c\|x\|$ $\forall\, x \in X$.

*Definimos a **norma sup** de f por:*

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{\|x\| = 1} |f(x)|$$

Definição 8. *O **espaço dual** de um espaço com produto interno X, denotado por X^*, é o conjunto de todos os funcionais lineares limitados em X. Definimos a adição e a multiplicação por escalar em X^* pontualmente. Assim, X^* com a norma sup é um espaço vetorial normado.*

Definição 9. *Um **hiperplano** em um espaço com produto interno X é um conjunto da forma:*

$$H := \{y \in X;\ x^*(y) = c\}$$

*onde $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ e $c \in \mathbb{R}$. Se $c = 0$, $H := \ker x^*$ é o **núcleo** de x^*.*

Teorema 4. *(**Distância a Hiperplanos**) Sejam X um espaço com produto interno, $x^* \in X^* \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$, e $H = \{y \in X;\ x^*(y) = c\}$. Então:*

$$d(x, H) = \frac{1}{\|x^*\|} |x^*(x) - c| \quad \forall\, x \in X. \qquad (1)$$

Teorema 5. *Sejam X um espaço com produto interno e $z \in X$ fixo. A função real f_z definida em X por:*

$f_z(x) := \langle x, z \rangle$ $\forall\, x \in X$, é um funcional linear limitado em X e $\|f_z\| = \|z\|$.

Exemplo. *Se $X = \mathbb{R}^2$, fixe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a^2 + b^2 \neq 0$ e considere H como a reta:*

$H = \{y \in \mathbb{R}^2;\ \langle y, z \rangle = c\}$, onde $z = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Então:

$d((x_1, x_2), H) = (a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}} |a x_1 + b x_2 - c|$

Note que a fórmula acima corresponde à fórmula de distância de ponto a reta já conhecida.

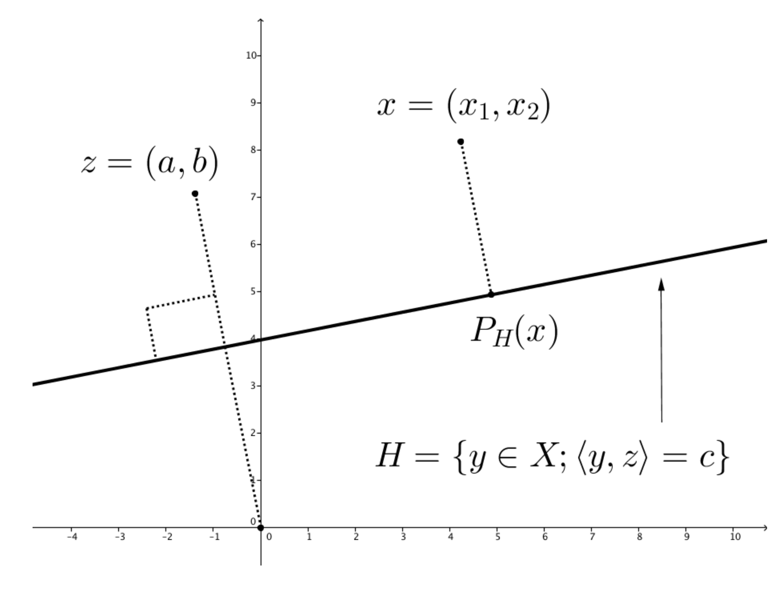

Figura 2: Distância de um ponto x ao hiperplano H

Referências

[1] Deutsch, F.,(2011) *Best Approximation in Inner Product Spaces*, Springer.

[2] Kreyszig, E.,(1978) *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley.