Introdução à Análise Funcional

Paula Damasceno Moreira
Bolsista PIBIC/CNPq

Ary Orozimbo Chiacchio
Orientador

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Introdução

Neste projeto estudamos alguns conceitos básicos de espaços métricos, espaços normados e espaços com produto interno. Em seguida estudamos alguns teoremas da análise funcional.

Palavras-chave: espaços normados, aproximação, teorema de Weierstrass.

Algumas definições e alguns resultados estudados

Definição 1. Seja M um conjunto não vazio e $d : M \times M \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(d_1) $d(x,y) \geq 0, \forall x, y \in M$
(d_2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \forall x, y \in M$
(d_3) $d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in M$
(d_4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \forall x, y, z \in M$

Dizemos que d é uma métrica em M.

Definição 2. Seja p um ponto no espaço métrico (M,d). Sendo $\epsilon > 0$ a bola aberta de centro p e raio ϵ, indicada por $B(p,\epsilon)$ é o seguinte subconjunto de M:

$$B(p,\epsilon) = \{x \in M : d(x,p) < \epsilon\}$$

Definição 3. Um ponto $x \in M$ é dito ponto limite de um conjunto $E \subset M$ se toda bola aberta $B(x;r)$ contém algum ponto $y \in E$, com $y \neq x$.

Definição 4. Um ponto x é dito ponto interior de E se existe $r > 0$ tal que $B(x;r) \subseteq E$. Dizemos que um conjunto E é aberto se todo ponto de E é ponto interior.

Definição 5. Uma família de conjuntos é dita uma cobertura de E se E está contido na união dos conjuntos dessa família. Dizemos que a cobertura é aberta se cada elemento da família for um aberto.

Definição 6. E é compacto se toda cobertura aberta de E admite uma subcobertura finita.

Definição 7. E é sequencialmente compacto se toda seqüência de E contém uma subseqüência convergente em E.

Definição 8. E é denso em M se todo ponto de M é um ponto limite de E.

$C([a,b],\mathbb{R})$ denota o espaço de todas as funções contínuas definidas no intervalo $[a,b]$, com valores reais, munido da norma $\|f\|_\infty = sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$.

Teorema 1 (Heine-Borel). Um subconjunto E de $\mathbb{R}^n$ é compacto se e somente se é fechado e limitado.

Definição 9. Seja $E \subset C([a,b],\mathbb{R})$. O conjunto E é eqüicontínuo em $x \in [a,b]$ se para qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $y \in [a,b]$ e $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon, \forall f \in E$.

Teorema 2 (Arzelà-Ascoli). Seja $E \subseteq C([a,b],\mathbb{R})$. Então E é compacto se e somente se é limitado, fechado e eqüicontínuo.

Teorema 3 (Stone-Weierstrass). Seja X um espaço métrico compacto, e assuma que $A \subseteq C(X;\mathbb{R})$ satisfaz as seguintes propriedades:

a) A é um álgebra: se $f, g \in A$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $f+g, f \cdot g$ e αf estão todos em A.
b) A função constante $f(x) = 1, \forall x \in A$ está em A (e portanto A contém todas as funções constantes).
c) A separa pontos: para $x \neq y \in X$, existe uma $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Então A é denso em $C(X;\mathbb{R})$.

Definição 10. Dizemos que V é um espaço vetorial normado se existe uma função $\|\ \| : V \to \mathbb{R}$, chamada norma, satisfazendo:

i) $\|v\| \geq 0, \forall v \in V$;
ii) $\|v\| = 0$ se e somente se $v = 0$;
iii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|, \forall v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$;
iv) $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|, \forall v, u \in V$.

Teorema 4 (Hahn-Banach). Seja E um espaço normado real e seja M_0 um subespaço de E. Então, para cada $\phi_0 \in M_0$ existe um funcional linear $\phi : E \to \mathbb{R}$ tal que:

a) $\phi(x) = \phi_0(x), \forall x \in M_0$
b) $\|\phi\| = \|\phi_0\|$

Teorema 5 (Aproximação de Weierstrass). Os polinômios são densos em $C([a,b],\mathbb{R})$. Ou seja, dado qualquer $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ e dado um $\epsilon > 0$, existe um polinômio $p \in C([a,b],\mathbb{R})$ tal que $\|f - p\|_\infty < \epsilon$.

Para sua demonstração utilizamos os polinômios de Berstein:

$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$, onde

$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ é o coeficiente binomial.

Abaixo damos um exemplo de uma função sendo aproximada por um polinômio:

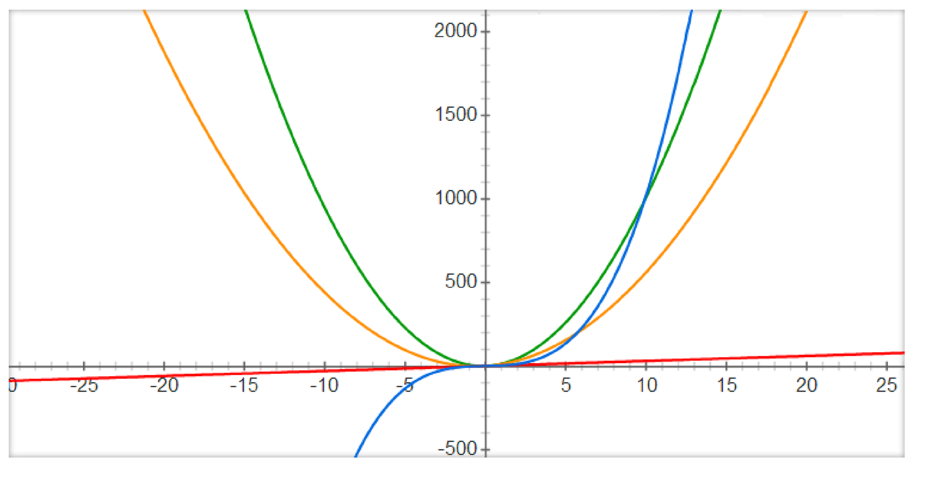

Gráfico 1: gráfico da função $f(x) = x^3 + 2x + 1$,

usando o teorema da aproximação de Weierstrass.

Conclusão

Começamos nossos estudos com propriedades básicas de espaços métricos, analisando vários exemplos e resolvendo exercícios relacionados. Em seguida estudamos os teoremas de Heine-Borel e Arzelà-Ascoli, apresentando e discutindo esses temas por meio de seminários semanais com o orientador. Mais adiante vimos alguns teoremas importantes de análise funcional, tais como Teorema da Aproximação de Weierstrass, Teorema de Stone-Weierstrass. Sendo assim, atingimos o principal objetivo deste projeto que era familiarizar a aluna com alguns métodos de análise funcional, à análise crítica de resultados e demonstrações além de um primeiro contato com a preparação de seminários.

Bibliografia

[1] K. SAXE, *Beginning Functional Analysis*, Springer-Verlag, 2002;
[2] Brosowski and Deutsch, *An elementary proof of the Stone-Weiertrass theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 81. 1981, 89-92.
[3] H. H. Domingues, *Espaços Métricos e Introdução à Topologia*, Atual Editora, 1982;