A SIMETRIA DE CALIBRE DA TEORIA ELETROMAGNÉTICA: UM ESTUDO INTRODUTÓRIO

UNICAMP

IMECC

Aluno: Daniel Gomes Fadel

fadel.daniel@gmail.com

Orientador: Prof. Dr. Henrique N. Sá Earp

henrique.saearp@ime.unicamp.br

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Apoio: CNPq.

Palavras-Chave: Teoria de Calibre, Eletromagnetismo, Fibrados.

Introdução

Teoria de calibre (do inglês *gauge theory*) é o estudo da geometria de G-fibrados, suas conexões e curvaturas associadas. Métodos desta teoria são bastante úteis na classificação topológica de variedades. Em física, as estruturas matemáticas que emergem em teoria de calibre correspondem a um ambiente natural para descrição de interações fundamentais da natureza.

Visando a compreensão do eletromagnetismo como uma $U(1)$-teoria de calibre, o projeto passou pelo estudo de grupos de Lie; fibrados principais e vetoriais; conexão e curvatura; operador estrela de Hodge em variedades riemannianas orientadas; noções de cálculo variacional e, por fim, uma introdução à teoria de Yang-Mills em G-fibrados ([3] e [4]).

O Eletromagnetismo como Teoria de Calibre

Neste trabalho, todas as variedades e mapas serão supostos de classe C^∞; M sempre denotará uma variedade.

O ambiente natural de uma teoria de calibre é a seguinte estrutura matemática (vide [3] e [4] para maiores detalhes).

Definição 1. *Um* **fibrado vetorial complexo (real) de posto** k *sobre* M *é uma variedade* E *juntamente com um mapa sobrejetivo* $\pi : E \longrightarrow M$*, de tal forma que:*

- *existe um espaço vetorial complexo (real)* k*-dimensional* V*, dito a* fibra típica *de* E*, tal que* $\forall x \in M$*, a fibra* $E_x := \pi^{-1}(x)$ *sobre o ponto* x *é um espaço vetorial isomorfo a* V*;*
- E *é localmente trivial, i.e.,* $\forall x \in M, \exists U$ *vizinhança aberta de* x *e um difeomorfismo* $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times V$ (**trivialização local**) *tal que* $\pi_1 \circ \varphi = \pi$*, onde* π_1 *é a projeção no primeiro fator;*
- *para cada* $x \in U$*, a restrição* $\varphi|_{E_x} : E_x \longrightarrow V$ *é um isomorfismo* $\mathbb{C}$*-linear (respec.* $\mathbb{R}$*-linear).*

E *e* M *são, respectivamente, a* variedade total *e a* variedade base *do fibrado.*

Todo fibrado vetorial (real ou complexo) $E \to M$ vem equipado, naturalmente, com um **grupo estrutural**: se V denota a fibra típica (espaço vetorial real ou complexo) do fibrado, uma coleção $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de trivializações locais de E, cujos domínios cobrem a variedade base M, dá origem a **funções de transição** $\{g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(V)\}$ definidas através dos difeomorfismos $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}|_{(U_\alpha \cap U_\beta)\times V} : (x, v) \mapsto (x, g_{\alpha\beta}(x)v)$; pode acontecer que, para alguma coleção de trivializações locais, as funções de transição associadas tomam valores em um subgrupo de Lie $G \subset GL(V)$. Neste caso, dizemos que G é o grupo estrutural de $E \to M$, e que E é um G-**fibrado vetorial**. O grupo de Lie G é interpretado como o grupo que preserva alguma estrutura adicional presente nas fibras, e também é dito o grupo de calibre do fibrado.

Um automorfismo $T \in \mathrm{Aut}(E)$ de um G-fibrado vetorial E, i.e., um difeomorfismo $T : E \to E$ recobrindo a identidade $\mathrm{id}_M : M \to M$ e cuja restrição $T^x := T|_{E_x} : E_x \to E_x$ é um isomorfismo linear, para cada $x \in M$, é dito uma **transformação de calibre** em E quando T^x é um elemento de G, para cada $x \in M$. Munido da operação de composição, o conjunto das transformações de calibre em E é um grupo, dito o **grupo das transformações de calibre** de E. Denotamos este grupo por $\mathcal{G}(E)$ e seus elementos por letras minúsculas g, h, etc.

Definição 2. *Uma* **conexão** *num fibrado vetorial* $E \longrightarrow M$ *é um mapa linear* $\nabla : \Gamma(E) \to \Omega^1(M, E)$ *satisfazendo a regra de Leibniz:* $\nabla(fs) = f\nabla s + s \otimes df$, $\forall s \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(M)$.

A **curvatura** *de uma conexão* ∇ *é a* 2*-forma com valores em* $\mathrm{End}(E)$ *dada por*

$$F_\nabla := \nabla \circ \nabla.$$

Num G-fibrado vetorial E as conexões fisicamente relevantes são aquelas compatíveis com a estrutura que o grupo G preserva, ou melhor, aquelas cujas componentes $A_i^\sigma \in \mathrm{End}(E)$ da matriz de conexão $A^\sigma = \sum_i A_i^\sigma \otimes dx^i$, num sistema de coordenadas $(x^1, \ldots, x^d)$ e um calibre $\sigma \subset \Gamma(E|_U)$, tomam valores na álgebra de lie $\mathfrak{g}$ de G, no sentido que numa trivialização podemos escrever

$$\nabla = d + A, \text{ com } A \in \Omega^1(M; \mathfrak{g}_E),$$

onde $\mathfrak{g}_E$ denota o **fibrado de álgebras de Lie** de E, um subfibrado do fibrado $\mathrm{End}(E)$ cuja fibra, em um ponto $x \in M$, são os elementos de $\mathrm{End}(E_x)$ que moram na álgebra de lie $\mathfrak{g}$ do grupo de estrutura G.

Tais conexões são ditas G-**conexões**, e o conjunto das G-conexões em E é denotado por $\mathcal{A}(E)$.

O grupo de calibre do eletromagnetismo é o $U(1) = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} : \theta \in \mathbb{R}\} \simeq S^1$, o **grupo unitário** de dimensão complexa 1. Com a operação de grupo dada pela multiplicação de números complexos, $U(1)$ tem uma estrutura de grupo **abeliano** (i.e., a operação de grupo de $U(1)$ é comutativa).

As equações de Maxwell na linguagem de formas diferenciais (vide detalhes em [4]) são escritas da seguinte forma:

$$\begin{cases} dF = 0 \\ \star d \star F = J, \end{cases} \tag{1}$$

onde F é uma 2-forma, que chamamos de **campo eletromagnético**, e J é a 1-forma denominada **corrente**.

Na teoria de Yang-Mills, a idéia é generalizar estas equações para o contexto de formas valoradas no fibrado de endormorfismos de um G-fibrado vetorial E. Mais precisamente, passamos a interpretar F como um tensor curvatura associado à uma G-conexão ∇ (que faz o papel de d), e em J como sendo uma 1-forma com valores em $\mathrm{End}(E)$.

Neste contexto, a primeira equação se torna uma tautologia, já que a **identidade de Bianchi** nos diz que $\nabla F_\nabla = 0$. Assim, o interesse reside numa generalização do segundo par das equações de Maxwell, $\star d \star F = J$. Em verdade, nos concentramos no caso $J = 0$ (vácuo), onde a **equação de Yang-Mills** se escreve

$$\nabla \star F_\nabla = 0. \tag{2}$$

Pode-se mostrar (vide [4]) que esta equação é precisamente as equações de Euler-Lagrange de um certo funcional em E, denominado **funcional de Yang-Mills**.

Dito isso, passamos a explicitar o **eletromagnetismo como teoria de calibre** (cf. [1, p. 69] e [2, p. 230,252]). Consideramos um $U(1)$-fibrado vetorial (complexo) E sobre $M = \mathbb{R}^4$.

Antes de tudo, o fato de $\mathbb{R}^4$ ser contrátil implica (vide Apêndice A de [4]) que E é trivial, i.e., $E = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}$. Em particular, segue que uma transformação de calibre neste fibrado, i.e., um elemento $g \in \mathcal{G}(E)$, pode ser identificado com um mapa C^∞ da forma

$$g : \mathbb{R}^4 \ni x \mapsto e^{-f(x)} \in U(1),$$

para alguma função suave $f : \mathbb{R}^4 \to \mathfrak{u}(1) = i\mathbb{R}$.

Além disso, a trivialidade de E nos permite identificar uma conexão em E por um elemento de $\Omega^1(M; \mathrm{End}(E))$. Se $A \in \Omega^1(M; \mathrm{End}(E))$, a ação de uma transformação de calibre g muda A via

$$A \longrightarrow A' = gAg^{-1} + gdg^{-1}.$$

Ora, como observamos acima, uma transformação de calibre g em E é da forma $g = e^{-f}$, com $f : \mathbb{R}^4 \to i\mathbb{R}$. Portanto, g age em A via

$$A \longrightarrow A' = A + df,$$

uma vez que $gdg^{-1} = e^{-f}(df)e^f = df$. Em outras palavras, uma transformação de calibre em $E = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}$ age num potencial A, a menos do um fator i da álgebra de Lie, somando a diferencial de uma função escalar $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$. Esta é a liberdade de calibre de uma conexão A em E.

Agora, se A é uma $U(1)$-conexão, como $\mathbb{R}^4$ é equipado naturalmente com um sistema de coordenadas global $(x^0, \ldots, x^3)$, A é expresso por uma soma da forma $A = \sum_j A_j dx^j$, com $A_j : \mathbb{R}^4 \to i\mathbb{R}$. Analogamente, podemos escrever $F_A = \sum_{i<j} F_{ij} \otimes dx^i \wedge dx^j$, com $F_{ij} : \mathbb{R}^4 \to i\mathbb{R}$, para o tensor curvatura associado à A. Agora, sabemos (vide [4]) que

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j].$$

Ora, como $U(1)$ é um grupo de Lie **abeliano**, segue que o colchete $[\cdot, \cdot]$ da sua álgebra de Lie $\mathfrak{u}(1) = i\mathbb{R}$ é identicamente nulo. Logo, na verdade, podemos escrever

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i. \tag{3}$$

Este é um ponto fundamental. A menos do fator complexo i, embutido nas definições de A_j e F_{ij} (elementos de $\mathfrak{u}(1)$), a expressão obtida em (3) é exatamente aquela que encontramos classicamente para as componentes F_{ij} do campo eletromagnético F em termos do potencial vetorial A. Na verdade, é por isso que em teoria de calibre a curvatura generaliza o papel que o campo eletromagnético exerce nas equações de Maxwell (1).

De fato, concluimos isso interpretando estas equações como, respectivamente, a idendidade de Bianchi ($\nabla F_\nabla = 0$) e a equação de Yang-Mills ($\star\nabla \star F_A = J$) associadas à E. O fato de E ser um $U(1)$-fibrado vetorial implica, em particular, que E é um fibrado (complexo) de posto 1. Isto significa que o comutador graduado $[\cdot, \cdot]$ em $\Omega(M; \mathrm{End}(E)) \simeq \Omega(M; \mathbb{C})$ é identicamente nulo. Logo, vide [4], uma conexão A em E age em k-formas à valores em $\mathrm{End}(E)$ (globalmente, $M = \mathbb{R}^4$) por

$$\nabla_A \xi = d\xi + [A, \xi] = d\xi.$$

Assim, a identidade de Bianchi para a curvatura F_A neste fibrado equivale à $dF_A = 0$, ou seja, a curvatura F_A, interpretada como campo eletromagnético F, satisfaz trivialmente o primeiro par das equações de Maxwell, $dF = 0$.

Por fim, note que a equação de Yang-Mills associada à este $U(1)$-fibrado se escreve $\star d \star F_A = J$, representando assim o segundo par (o par não-trivial) das equações de Maxwell em termos da curvatura F_A. Isso conclui a compreensão do eletromagnetismo como $U(1)$-teoria de calibre.

Conclusão

Acreditamos que atingimos o objetivo do projeto: compreender o eletromagnetismo como $U(1)$-teoria de calibre. Agradeço ao CNPq pelo financiamento, ao professor Henrique N. Sá Earp pela orientação, e à minha família e amigos pelo apoio complementar.

Referências

[1] Marcelo G. De Martino *Teoria de Calibre em dimensões dois e quatro*. Dissert. Mestr. IMECC-UNICAMP (2011).

[2] J. Baez, J.P. Munian *Gauge Fields, Knots and Gravity*. World Scientific (1994).

[3] Daniel G. Fadel *Relatório Parcial* - PIBIC (2013).

[4] Daniel G. Fadel *Relatório Final* - PIBIC (2013).